

Научная статья

УДК 519.68+338.27

EDN OISMRT

DOI 10.17150/2411-6262.2023.14(4).1407-1417

**Г.В. Попов***Байкальский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация, popov2898@mail.ru*

## ОСОБЕННОСТИ ОПЦИИ «АНАЛИЗ ФУРЬЕ» В ТАБЛИЦЕ EXCEL ПРИ ПРОВЕДЕНИИ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА И ДЛЯ ВЫЯВЛЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ ВО ВРЕМЕННЫХ РЯДАХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

**АННОТАЦИЯ.** Электронная таблица Excel, которая имеется «под рукой» у каждого исследователя временных рядов экономических данных, позволяет проводить их Фурье анализ, то есть выделять в них циклы, и подбирать для них функциональную аппроксимацию. Однако она делает это с помощью алгоритма БПФ. Алгоритм БПФ мало знаком для широких кругов пользователей, не слишком то искушенных в высшей математике — экономистов, коммерсантов, менеджеров, инженеров. Им и адресуется настоящая работа, цель которой — научить пользоваться этой опцией для проведения спектрального анализа и для выявления периодических закономерностей во временных рядах экономических показателей. Особенностью использования Excel является то, что результат расчета по опции «Анализ Фурье» выдается в «зашифрованном» виде, который может быть и понятен для математика, но для исследователя экономических показателей совершенно непонятен. В настоящей работе проводится последовательная дешифровка работы опции путем общения с ней и задания ей вопросов, ответы на которые мы уже знаем. В результате получен алгоритм расшифровки ответа опции и алгоритм построения функционального вида периодических закономерностей. Тем самым появляется возможность прогнозирования не только на основе трендовой модели, но и гораздо глубже — с учетом выявленных периодичностей. Алгоритм такого прогнозирования также приводится.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА.** Временные ряды, анализ Фурье, быстрое преобразование Фурье, гармоники, амплитудно-частотная характеристика, трендовая модель, прогностика.

**ИНФОРМАЦИЯ О СТАТЬЕ.** Дата поступления 27 октября 2023 г.; дата принятия к печати 07 декабря 2023 г.; дата онлайн-размещения 29 декабря 2023 г.

Original article

**G.V. Popov***Baikal State University, Irkutsk, Russian Federation, popov2898@mail.ru*

## FEATURES OF THE “FOURIER ANALYSIS” OPTION IN THE EXCEL SPREADSHEET WHEN PERFORMING SPECTRAL ANALYSIS AND IDENTIFYING PERIODIC PATTERNS IN THE TIME SERIES OF ECONOMIC INDICATORS

**ABSTRACT.** The Excel spreadsheet, which is available “at hand” for each researcher of time series of economic data, allows for their Fourier analysis, that is, to identify cycles in them, and select a functional approximation for them. However, it does this using the FFT algorithm. The FFT algorithm is not familiar to a wide range of users who are not too sophisticated in higher mathematics — economists, merchants, managers, engineers. This work is addressed to them, the purpose of which is to teach how to use this option for spectral analysis and to identify periodic patterns in the time series of economic indicators. The

© Попов Г.В., 2023

peculiarity of using Excel is that the result of the calculation using the "Fourier Analysis" option is issued in an "encrypted" form, which may be understandable for a mathematician, but for a researcher of economic indicators is completely incomprehensible. In this paper, the sequential decryption of the operation of the option is carried out by communicating with it and asking it questions, the answers to which we already know. As a result, an algorithm for decrypting the option response is obtained. and an algorithm for constructing a functional type of periodic patterns. Thus, there is a possibility of forecasting not only on the basis of a trend model, but also much deeper - taking into account the identified periodicities. The algorithm of such forecasting is also given.

**KEYWORDS.** Time series, Fourier analysis, fast Fourier transform, harmonics, amplitude-frequency response, trend model, prognostics.

**ARTICLE INFO.** Received October 27, 2023; accepted December 07, 2023; available online December 29, 2023.

Введение

При построении прогнозных моделей временных рядов [1–3] экономических показателей обычно полагается, что динамика показателя  $\Pi(t)$  определяется тремя составляющими:  $\Pi(t) = T(t) + \mathcal{C}(t) + \varepsilon(t)$ , где  $T(t)$  — основная тенденция (тренд),  $\mathcal{C}(t)$  — циклическая составляющая и  $\varepsilon(t)$  — случайная составляющая. Если технологии подбора тренда в учебниках и монографиях уделяется очень большое внимание и ей посвящена даже целая дисциплина — эконометрика [4–8] , то практика выделения циклов и подбора для них функциональной аппроксимации оказывается обижённой вниманием. Именно поэтому ниже будет рассмотрена возможность выполнения этих работ с помощью простейшего инструмента — электронной таблицы Excel, которая имеется «под рукой» у каждого исследователя временных рядов экономических данных.

Среди инструментов анализа данных, которыми располагает электронная таблица Excel, есть опция «Анализ Фурье», которую можно найти по адресу: *Сервис/Анализ данных/Анализ Фурье*. Однако приведенная в справке Excel информация об этой опции и о методике ее использования совершенно недостаточна. Вот эта справка, скопированная из Excel:

Анализ Фурье

*Предназначается для решения задач в линейных системах и анализа периодических данных, используя метод быстрого преобразования Фурье (БПФ). Эта процедура поддерживает также обратные преобразования, при этом, инвертирование преобразованных данных возвращает исходные данные.*

Входной диапазон	Выходной диапазон
↓	↓
Временной ряд	Амплитудно-частотная характеристика
1	3
1	1.707107 – 1.707107i
1	–i
0	0.292893 + 0.292893i
0	1

Эта информация и приведенный пример может оказать действенную помощь лишь пользователю, хорошо знакомому с разделом «Ряды Фурье» высшей математики и с особенностями метода быстрого преобразования Фурье [9–12]. Вместе с тем, опция «Анализ Фурье» весьма полезна для широких кругов пользователей, не слишком то

искусшенных в высшей математике — экономистов, коммерсантов, менеджеров, инженеров. Им и адресуется настоящая работа, цель которой — научить пользоваться этой опцией для проведения спектрального анализа и для выявления периодических закономерностей во временных рядах экономических показателей.

### 1. Кому и для чего может пригодиться «Анализ Фурье»

Опция «Анализ Фурье» позволяет провести спектральный анализ временного ряда и получить его амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) — об этом говорит справка Excel.

АЧХ показывает, с каким весом (вкладом) в исследуемом временном ряду присутствуют те или иные периодичности (гармоники). Если вклад одной или нескольких гармоник преобладает, то можно построить простую аналитическую модель (т.е. записать формулу), отражающую периодичности, присутствующие в исходном ряду. Именно такая задача встает при прогнозе временных рядов [1–3], которым занимаются экономисты и коммерсанты. Например, при анализе ситуации на фондовом рынке очень важно выявить основные периодичности, повторяемости динамики цен. Если обнаружено, что максимумы (минимумы) цен повторяются через определенный промежуток времени, то можно заблаговременно подготовиться и выгодно продать (купить) ценные бумаги.

Радиоинженеры могут рассматривать временной ряд как сигнал и АЧХ для них — важнейшая характеристика такого сигнала. Если сигнал представлен в натуральном («электрическом») виде, то АЧХ или родственную ему характеристику — спектр сигнала — можно определить с помощью специального прибора, спектро-анализатора. Если же сигнал представлен в виде результатов последовательных его измерений, то здесь как раз и пригодится опция «Анализ Фурье».

Итак, обсуждаемая опция полезна для связистов, коммерсантов и экономистов в их практической деятельности.

### 2. Некоторые определения и сведения про ряды Фурье и метод БПФ

Любой сигнал (или временной ряд)  $S(t)$ , заданный на интервале  $t = [0, T]$ , может быть представлен [1] в виде суммы гармоник:

$$S(t) = a_0 / 2 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)) . \quad (1)$$

Здесь  $\omega_0 = 2\pi/T$ , а коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  можно рассчитать так:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T S(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T S(t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt \end{aligned} \quad (2)$$

Выражение, стоящее под знаком суммы в формуле (1), называют гармоникой. Следовательно, гармонику « $n$ » можно записать так:

$$A_n(t) = a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) = A_{n0} \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) . \quad (3)$$

Здесь  $A_{n0}$  — амплитуда  $n$ -ой гармоники,  $(n\omega_0 t + \varphi_n)$  — ее фаза, а  $\varphi_n$  — начальная фаза. Между величинами  $a_n$ ,  $b_n$  и  $A_{n0}$  имеется такая связь:

$$A_{n0} = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}. \quad (4)$$

Каждая гармоника имеет свою частоту  $\omega_n = n\omega_0$  и свою амплитуду  $A_{n0}$ .

Зависимость  $A_{n0}$  от  $\omega_n$  называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) исходного временного ряда  $S(t)$ . Именно АЧХ выдает (или возвращает) опция «Анализ Фурье» таблицы Excel.

Если функция  $S(t)$ , входящая в формулы (2), задана в виде временного ряда, то используется специальный алгоритм [9–12], получивший название БПФ. Он существенно упрощает расчеты, но накладывает требование на длину временного ряда. Число значений анализируемого ряда должно быть  $2^n$ , где  $n$  принимает любое разумное значение. На рис. 1 в диалоге с опцией использовано  $n = 16$ , а в дальнейших рассуждениях мы будем использовать  $n = 64$ . Особенностью алгоритма БП является и то, что результат расчета представляется в виде комплексных чисел, что видно и в справке Excel, приведенной выше. В смысле этой комплексности нам предстоит разобраться в дальнейшем.

Использование опции в таблице Excel начинается (см. рис. 1) с такого диалога.

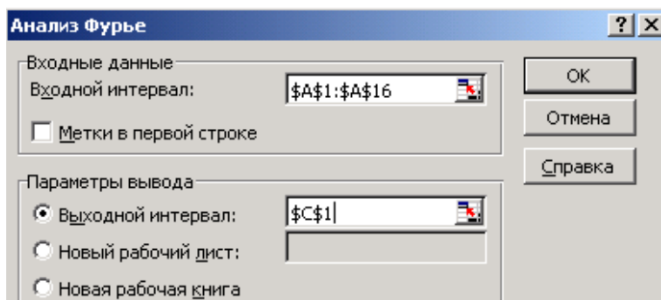


Рис. 1. Диалог «Анализ Фурье»

Здесь в окне «Входной интервал» надо указать столбец данных, предъявляемых для анализа (на рис. 1 в диалоге указано 16 ячеек столбца «А» — с A1 по A16). В окне «Выходной интервал» надо указать место, куда будет выведен ответ. Это может быть новая рабочая книга, или новый рабочий лист, или же ячейка на активном рабочем листе, начиная с которой выстроится столбец с ответом. На рис. 1 указана ячейка C1 — это означает, что ответ будет расположен в столбце «С», начиная с ячейки C1.

### 3. Экзаменуем Excel

#### 3.1. Знакомимся с гармониками и «придумываем» задания для Excel

Для того, чтобы научиться расшифровывать язык, на котором Excel дает нам информацию про АЧХ исходного ряда, мы будем его «экзаменовать».

Экзамен будет состоять в том, что мы будем задавать Excel такие вопросы, ответы на которые мы заранее знаем. В частности, задавая ему для Фурье анализа отдельные гармоники, с известными нам частотами и амплитудами мы постараемся найти в его ответах эти частоты и амплитуды.

Для реализации такого экзамена нам придется создавать столбцы данных, представляющих отдельные гармоники. Вспомним (см. выше), что отдельную гармонику можно представить формулой (3), которую мы записали выше:

$$A_n(t) = A_{n0} \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) = A_{n0} \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t + \varphi_n\right).$$

Используем эту формулу, чтобы заполнить данными пять столбцов, каждый из которых будет представлять отдельную гармонику.

Подготовим свободный рабочий лист в Excel, введем названия первых шести столбцов (Время  $t$ ,  $A_1$ – $A_5$  — как на рис. 2). Рядом разместим ячейки, в которые введем постоянные, входящие в формулу (3).

Сверху обозначим эти постоянные, как на рис. 2 —  $\Pi$ ,  $T$ ,  $\varphi$  и  $A$ . Число « $\Pi$ » вводим с помощью соответствующей функции, а остальным постоянным придадим значения, показанные на рис. 2.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Время $t$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$\Pi$	$T$	$\varphi$	$A$
2	1						3.14...	64	0	1
3	2									
	.....									
...	.....									
65	64									

Рис. 2. Пример разметки первого рабочего листа

Обратим внимание, что моменты времени в столбце  $A$  принимают значения от 1 до 64. Теперь введем в ячейку B2 формулу (3), указав мышкой на ячейку A2 вместо времени  $t$  и на ячейки G2–J2 вместо соответствующих постоянных (при этом адреса постоянных надо зафиксировать!). Для значка  $\pi$  введем (с клавиатуры) значение 1 — это номер гармоники. После этого «протащим» формулу мышкой по всему столбцу B — в результате мы получим ряд данных, который представляет первую гармонику с амплитудой 1, периодом 64 и фазой 0.

Аналогичным образом заполняем столбцы C, D, E и F (значения для второй, третьей, четвертой и пятой гармоник, изменяя значения  $n$ ).

Следующий шаг — на втором листе книги делаем заготовку данных для Фурье-анализа. Для этого столбцы с B по F копируем на второй лист с помощью «специальной вставки» (т.е. копируем только значения, но не функции). Столбец A, в котором стояли значения моментов времени, копировать не будем, но запомним, что по вертикали сверху вниз идет отсчет времени.

3.2. А что нам ответит Excel?

Начинаем работу на втором листе книги Excel. У нас есть пять столбцов, в каждом из которых 64 значения. Мы знаем, что в первом столбце — значения первой гармоники, т.е. периодического процесса с периодом 64, амплитудой 1 и фазой 0. Аналогично, во втором столбце — вторая гармоника (ее период равен  $64/2 = 32$ , амплитуда 1, фаза 0), в третьем столбце — третья гармоника (ее период равен  $64/3 = 21.33$ , амплитуда 1, фаза 0) и так далее.

Теперь мы проведем Фурье — анализ этих столбцов поочередно, начиная с первого. Чтобы получить наглядные результаты, сначала вставим пустые столбцы — как на рис. 3.

Теперь вставим в столбец  $\Phi 1$  результат Фурье -анализа первой гармоники, в столбец  $\Phi 2$  — второй гармоники и т.д. Получаем таблицу, похожую на рис. 4.

Расшифровку ответа Excel начнем с первой гармоники. В столбце  $\Phi 1$  должна содержаться информация о том, что это первая гармоника, т.е. ее период равен 64, и о том, что амплитуда ее равна 1. Вместо этого в столбце стоят везде нули,

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	$A_1$	$\Phi_1$	$A_2$	$\Phi_2$	$A_3$	$\Phi_3$	$A_4$	$\Phi_4$	$A_5$	$\Phi_5$
2	333.3		333.3		333.3		333.3		333.3	
3	333.3		333.3		333.3		333.3		333.3	
	333.3		333.3		333.3		333.3		333.3	
...	333.3		333.3		333.3		333.3		333.3	
65	333.3		333.3		333.3		333.3		333.3	

Рис. 3. На втором листе — вставляем пустые столбцы между имеющимися  $A_1$ – $A_5$  и озаглавим их  $\Phi_1$ – $\Phi_5$  — в эти столбцы мы поместим результаты Фурье-анализа. Символами 333.3 обозначены данные по гармоникам и скопированные с первого листа

A1	$\Phi 1$	A2	$\Phi 2$	A3	$\Phi 3$	A4	$\Phi 4$	A5	$\Phi 5$
0,99	0	0,98	0	0,95	0	0,923	0	0,881	0
0,98	$31,8 + 3,14i$	0,92	0	0,83	0	0,70	0	0,55	0
0,95	0	0,83	$31,3 + 6,2i$	0,63	0	0,382	0	0,098	0
0,92	0	0,70	0	0,38	$30,6 + 9,2i$	$6,1E - 17$	0	-0,382	0
0,88	0	0,55	0	0,09	0	-0,382	$29,5 + 12,2i$	-0,773	0
0,83	0	0,38	0	-0,19	0	-0,707	0	-0,980	$28,2 + 15,i$
0,77	0	0,19	0	-0,47	0	-0,923	0	-0,956	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
0,83	0	0,38	0	-0,19	0	-0,707	0	-0,980	0
0,88	0	0,55	0	0,09	0	-0,382	0	-0,773	0
0,92	0	0,70	0	0,38	0	$-2,7E - 5$	0	-0,382	$28,2-15,i$
0,95	0	0,83	0	0,63	0	0,382	$29,5 - 12,24i$	0,098	0
0,98	0	0,92	0	0,83	$30,6 - 9,2i$	0,707	0	0,555	0
0,99	0	0,98	$31,3 - 6,2i$	0,95	0	0,923	0	0,881	0
1	$31,8 - 3,14i$	1	0	1	0	1	0	1	0

Рис. 4. Результат Фурье-анализа отдельных гармоник

кроме второй сверху и первой снизу строк. При этом в указанных строках стоят сопряженные комплексные числа.

Немного позже мы разберемся, почему эти числа комплексные, а сейчас избавимся от «комплексности» простой процедурой — перейдем к модулям этих комплексных чисел с помощью функции МНИМ.ABS и проделаем это со всеми столбцами  $\Phi$ . Нам придется раздвигать столбцы, копировать результат специальной вставкой и удалять лишнее. В результате таблица будет выглядеть так, как показано на рис. 5.

Теперь все столбцы  $\Phi$  выглядят очень похоже — везде стоят либо нули, либо числа 32. Различие же состоит в том, что для первой гармоники — столбец  $\Phi 1$  — цифра 32 стоит во второй строке, для второй гармоники — столбец  $\Phi 2$  — цифра 32 стоит в третьей строке и т.д. Если первую строку считать нулевой, то оказывается номер строки с ответом Excel и обозначает номер гармоники! Это вывод справедлив для третьей, четвертой и пятой гармоник.

Но почему цифра 32? Вспомним, что основной период  $T$ , который мы задавали при конструировании гармоник, был равен 64. Поэтому мы можем



предположить, что Excel в строке, соответствующей номеру гармоник, выдает число, равное произведению амплитуды соответствующей гармоник на половину основного периода, т.е. число  $= A * T/2$ . Значит, чтобы получить значение амплитуды нам надо провести еще одно преобразование столбцов  $\Phi$  — нормировать их, разделив на число  $T/2$ , которое в нашем случае равно 32. В итоге получим уже «расшифрованный» ответ Excel на наши «экзаменационные вопросы» — см. рис. 6.

A1	Φ1	A2	Φ2	A3	Φ3	A4	Φ4	A5	Φ5
0,99	0	0,98	0	0,95	0	0,923	0	0,881	0
0,98	32	0,92	0	0,83	0	0,70	0	0,55	0
0,95	0	0,83	32	0,63	0	0,382	0	0,098	0
0,92	0	0,70	0	0,38	32	6,1E – 17	0	–0,382	0
0,88	0	0,55	0	0,09	0	–0,382	32	–0,773	0
0,83	0	0,38	0	–0,19	0	–0,707	0	–0,980	32
0,77	0	0,19	0	–0,47	0	–0,923	0	–0,956	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
0,83	0	0,38	0	–0,19	0	–0,707	0	–0,980	0
0,88	0	0,55	0	0,09	0	–0,382	0	–0,773	0
0,92	0	0,70	0	0,38	0	–2,7E – 5	0	–0,382	32
0,95	0	0,83	0	0,63	0	0,382	32	0,098	0
0,98	0	0,92	0	0,83	32	0,707	0	0,555	0
0,99	0	0,98	32	0,95	0	0,923	0	0,881	0
1	32	1	0	1	0	1	0	1	0

Рис. 5. Вид таблицы после применения функции МНИМ.ABS ко всем столбцам  $\Phi$

A1	Φ1	A2	Φ2	A3	Φ3	A4	Φ4	A5	Φ5
0,99	0	0,98	0	0,95	0	0,923	0	0,881	0
0,98	1	0,92	0	0,83	0	0,70	0	0,55	0
0,95	0	0,83	1	0,63	0	0,382	0	0,098	0
0,92	0	0,70	0	0,38	1	6,1E – 17	0	–0,382	0
0,88	0	0,55	0	0,09	0	–0,382	1	–0,773	0
0,83	0	0,38	0	–0,19	0	–0,707	0	–0,980	1
0,77	0	0,19	0	–0,47	0	–0,923	0	–0,956	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
0,83	0	0,38	0	–0,19	0	–0,707	0	–0,980	0
0,88	0	0,55	0	0,09	0	–0,382	0	–0,773	0
0,92	0	0,70	0	0,38	0	–2,7E-5	0	–0,382	1
0,95	0	0,83	0	0,63	0	0,382	1	0,098	0
0,98	0	0,92	0	0,83	1	0,707	0	0,555	0
0,99	0	0,98	1	0,95	0	0,923	0	0,881	0
1	1	1	0	1	0	1	0	1	0

Рис. 6. Вид таблицы после нормировки столбцов  $\Phi$  — деления их на величину  $T/2 = 32$ . Это уже «расшифрованный» результат Фурье-анализа отдельных гармоник

Итак, таблица Excel успешно выдержала наш экзамен — она разобралась в том, какие гармоники мы ей давали. Если же говорить точнее, то это мы разобрались, каким образом таблица обозначает номер гармоник и их амплитуды. Оказывается она каждой гармонике отводит строчку в своем ответе. Первой гармонике она выделяет вторую строку сверху (и первую снизу), второй гармонике — третью строку сверху (и вторую снизу) и т.д. — до середины столбца. В каждой из этих строк Excel приводит амплитуду соответствующей гармонике, но умноженную на половину периода основной (т.е. первой) гармонике ( $T/2$ ). Поэтому чтобы узнать значение амплитуды нам надо делить ответ Excel на этот множитель (будем называть эту операцию нормировкой). После нормировки получается столбец, в котором стоят амплитуды гармоник в порядке возрастания их частоты (если идти сверху вниз до середины столбца — после середины амплитуды повторяются, но уже в порядке убывания частот!)

Остается невыясненным один вопрос — какую информацию выдает Excel в первой строке сверху? Оказывается, здесь располагается амплитуда «нулевой» гармоники, т.е. постоянной составляющей ряда Фурье. Проверим это утверждение! Для этого еще раз зададим таблице Excel для анализа одну из гармоник, но перед этим прибавим ко всему столбцу постоянное число (например, число 1). Тогда увидим, что в первой сверху строке ответа теперь появится ненулевое значение, но в отличие от других строк нормировочный коэффициент здесь не  $T/2$ , а  $T$ !

#### 4. Общий алгоритм расшифровки опции Фурье-анализ

Итак, подведем итог проведенного нами исследования и сформулируем последовательность действий (алгоритм), которые надо выполнить, чтобы провести спектральный анализ имеющегося временного ряда и представить ответ таблицы Excel в наглядном и понятном виде.

Чтобы построить АЧХ — график, показывающий состав исходного временного ряда (т.е. гармоники каких периодов и с какими амплитудами в нем присутствуют), надо выполнить следующие операции.

##### 4.1. Обработка исходного ряда опцией «Анализ Фурье».

Размещаем исходные данные в столбце сверху вниз, располагая их последовательно в порядке возрастания времени.

Из меню «Сервис\Анализ данных» вызываем опцию «Анализ Фурье». В диалоге с этой опцией в качестве входного интервала указываем 8 или 16 или 32 или 64, ..., т.е.  $2^n$  последовательных значений исходного ряда. Это число значений будет играть роль основного периода  $T$ .

В этом же диалоге указываем параметры вывода. Если хотим получить результаты на том же листе, то указываем верхнюю ячейку столбца, в который будет выведен результат.

Нажимаем ОК. В указанном месте появляется столбец с результатами в виде комплексных чисел.

##### 4.2. Расшифровка ответа

Избавимся от «мнимостей» в полученном результате. Для этого используем функцию МНИМ.ABS — получаем в соседнем столбце значения модулей комплексных чисел.

Нормируем полученные значения модулей комплексных чисел — делим их на число  $T/2$ , т.е. на половину основного периода  $T$  (сказанное не относится к числу, стоящему в самой верхней ячейке столбца — его мы делим на  $T$ ). В итоге получаем столбец из абсолютных значений амплитуд гармоник, которые, если



рассматривать верхнюю половину столбца, расположены в порядке возрастания частот от нулевой до  $f_0(T/2 - 1)$ .

### 4.3. Применяем полученные навыки

#### *График АЧХ и периодограмма*

Результат, полученный в виде столбца, можно представить в более наглядном виде, построив график зависимости амплитуд гармоник, входящих в исследуемый ряд, от их частот. Для этого, как отмечалось выше, надо использовать только верхнюю половину столбца. По горизонтальной оси графика откладываются частоты, а по вертикальной — амплитуды. При этом номер строки — это безразмерная частота соответствующей гармоники, т.е. частота, отнесенная к основной частоте  $f_0 = 1/T$ .

При практическом использовании АЧХ удобнее обозначать по горизонтальной оси не безразмерные частоты, а их абсолютные значения (в герцах).

#### 4.3.2. Алгоритм создания модели циклических составляющих временного ряда

Выше мы отмечали, что при построении прогнозных моделей временных рядов экономических показателей обычно полагают, что динамика показателя  $\Pi(T)$  определяется тремя составляющими:

$$\Pi(t) = T(t) + Ц(t) + \varepsilon(t),$$

где  $T(t)$  — основная тенденция (тренд),  $Ц(t)$  — циклическая составляющая и  $\varepsilon(t)$  — случайная составляющая. Навыки, полученные выше, при изучении опции «Анализ Фурье» таблицы Excel, дают возможность рядовому пользователю очень быстро выявить периодичности и подобрать для них функциональное выражение (т.е. построить модель, которую можно использовать для более качественного прогнозирования).

Как это сделать?

Заполняем столбец **A** значениями моментов времени в порядке возрастания. Рядом, в столбце **B** вводим соответствующие значения временного ряда.

Средствами таблицы Excel выделяем основную тенденцию (тренд) и подбираем ее функциональное представление.

Заполняем столбец **C** значениями по тренду (т.е. вводим подобранную выше функцию). В результате в столбце **C** получается трендовая модель исходного ряда.

В столбце **D** размещаем остатки, вычитая столбец **C** из столбца **B**. Теперь вызываем опцию «Анализ Фурье» и проведем спектральный анализ исходного временного ряда, используя  $2^n$  значений. В качестве выходного интервала указываем (для удобства) новый рабочий лист, где проводим вспомогательные вычисления, описанные в п. 4.2.

Теперь — самое ответственное! Смотрим на значения амплитуд гармоник, начиная с первой. Если все гармоники (а каждой гармонике отводится две строчки, расположенные симметрично относительно середины столбца и нумерация их идет к середине) имеют примерно одинаковые амплитуды, то в исходном временном ряду нет существенных периодичностей. В таком случае строить функциональную модель нецелесообразно. Но может оказаться, что одна или несколько гармоник имеют амплитуды, значительно превышающие остальные. *Выделяем такие гармоники!*

Для выделенных гармоник запишем их функциональное представление (на листе бумаги и на экране). Это делается так: гармоника с номером  $n$  записывается

как  $A_{n0} \cos(2\pi n t / T + \varphi_n)$ . Здесь  $A_{n0}$  и  $\varphi_n$  — амплитуда и фаза гармоники  $n$ , которые получены в п. 4.2.

Теперь вернемся на исходный лист и в столбце Е вводим формулу для суммы выделенных в п. 4.2. гармоник. При этом время  $t$  указываем ссылкой на соответствующую ячейку столбца А, а значения амплитуд и фаз — это константы. Как вариант можно заполнить несколько столбцов — по одному столбцу на каждую гармонику и еще один столбец, где будет стоять сумма гармоник.

Далее мы можем значительно усовершенствовать «трендовую» модель исходного временного ряда (она стоит в столбце С) прибавив к столбцу С столбец с суммой гармоник. Столбец с этим результатом мы можете озаглавить так: «Трендовая модель временного ряда с учетом выявленных цикличностей».

### Список использованной литературы

1. Отнес Р. Прикладной анализ временных рядов : основные методы / Р. Отнес, Л. Эноксон. — Москва : Мир, 1982. — 428 с.
2. Афанасьев В.Н. Анализ временных рядов и прогнозирование : учебник / В.Н. Афанасьев, М.М. Юзбашев. — Москва : Финансы и статистика, 2001. — 228 с.
3. Садовникова Н.А. Анализ временных рядов и прогнозирование : учеб. пособие / Н.А. Садовникова, Р.А. Шмойлова. — Москва, 2001. — 67 с.
4. Гладилин А.В. Эконометрика : учеб. пособие / А.В. Гладилин, А.Н. Герасимов, Е.И. Громов. — Москва : КНОРУС, 2006. — 232 с.
5. Эконометрика : учебник / И.И. Елисеева, С.В. Курышева, Т.В. Костеева [и др.] ; под ред. И.И. Елисеевой. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Финансы и статистика, 2007. — 576 с.
6. Chatfield C. Time series forecasting / C. Chatfield. — London : Chapman and Hall, 2000. — 267 p.
7. Davidson R. Econometric theory and methods / R. Davidson, J.G. MacKinnon. — New York : Oxford University Press, 2004. — 693 p.
8. Тихомиров Н.П. Эконометрика : учебник / Н.П. Тихомиров, Е.Ю. Дорохина. — 2-е изд., стер. — Москва : Экзамен, 2007. — 510 с.
9. Cooley J.W. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series / J.W. Cooley, J.W. Tukey // Mathematics of Computation. — 1965. — Vol. 19, iss. 90. — P. 297–301.
10. Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток / Г. Нуссбаумер. — Москва : Радио и связь, 1985. — 386 с.
11. Жук В.В. Тригонометрические ряды Фурье и элементы теории аппроксимации / В.В. Жук, Г.И. Натансон. — Ленинград : Изд-во ЛГУ, 1983. — 186 с.
12. Серегин Н.Н. Особенности использования дискретного преобразования Фурье при спектральном анализе / Н.Н. Серегин. — Екатеринбург, 2006. — 36 с.

### References

1. Otnes R.K., Enochson L. *Applied Time Series Analysis. Vol. 1. Basic Techniques*. New York, 1978. 472 p. (Russ. ed.: Otnes R.K., Enochson L. *Applied Time Series Analysis. Basic Techniques*. Moscow, Mir Publ., 1982. 428 p.).
2. Afanasev V.N., Yuzbashev M.M. *Time Series Analysis and Forecasting*. Moscow, Finansy i statistika Publ., 2001. 228 p.
3. Sadovnikova N.A., Shmoilova R.A. *Time Series Analysis and Forecasting*. Moscow, 2001. 67 p.
4. Gladilin A.V., Gerasimov A.N., Gromov E.I. *Econometrics*. Moscow, KNORUS Publ., 2006. 232 p.
5. Eliseeva I.I., Kuryshcheva S.V., Kosteeva T.V. *Econometrics*. 2<sup>nd</sup> ed. Moscow, Finansy i statistika Publ., 2007. 576 p.
6. Chatfield C. *Time Series Forecasting*. London, Chapman and Hall, 2000. 267 p.
7. Davidson R., MacKinnon J.G. *Econometric Theory and Methods*. New York, Oxford University Press, 2004. 693 p.

8. Tikhomirov N.P., Dorokhina E.Yu. *Econometrics*. 2<sup>nd</sup> ed. Moscow, Ehkzamen Publ., 2007. 510 p.
9. Cooley J.W., Tukey J.W. An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series. *Mathematics of Computation*, 1965, vol. 19, iss. 90, pp. 297–301.
10. Nussbaumer H.J. *Fast Fourier Transform and Convolution Algorithms*. New York: Springer-Verlag. 1982. 276 p. (Russ. ed.: Nussbaumer H.J. Fast Fourier Transform and Convolution Algorithms. Moscow, Radio i svyaz Publ., 1985. 386 p.).
11. Zhuk V.V., Natanson G.I. *Trigonometric Fourier Series and Elements of Approximation Theory*. Leningrad State University Publ., 1983. 186 p.
12. Seregin N.N. *Features of Using the Discrete Fourier Transform in Spectral Analysis*. Ekaterinburg, 2006. 36 p.

#### Информация об авторе

Попов Георгий Васильевич — доктор физико-математических наук, профессор, старший научный сотрудник Лаборатории региональных экономических исследований, Байкальский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация, popov2898@mail.ru, SPIN-код: 3979-6755, AuthorID РИНЦ: 58756.

#### Author

George V. Popov — D.Sc. in Physics and Mathematics, Professor, Senior Researcher of the Laboratory of Regional Economic Research, Baikal State University, Irkutsk, Russian Federation, popov2898@mail.ru, SPIN-Code: 3979-6755, AuthorID RSCI: 58756.

#### Для цитирования

Попов Г.В. Особенности опции «Анализ Фурье» в таблице Excel при проведении спектрального анализа и для выявления периодических закономерностей во временных рядах экономических показателей / Г.В. Попов. — DOI 10.17150/2411-6262.2023.14(4).1407-1417. — EDN OISMRT // Baikal Research Journal. — 2023. — Т. 14, № 4. — С. 1407–1417.

#### For Citation

Popov G.V. Features of the “Fourier Analysis” Option in the Excel Spreadsheet When Performing Spectral Analysis and Identifying Periodic Patterns in the Time Series of Economic Indicators. *Baikal Research Journal*, 2023, vol. 14, no. 4, pp. 1407–1417. (In Russian). EDN: OISMRT. DOI 10.17150/2411-6262.2023.14(4).1407-1417.