Научная статья
УДК 517.977.5, 51.77
EDN UXBBBU
DOI 10.17150/2411-6262.2023.14(1).287-298

Н.В. Антипина
Байкальский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация,
natant2012@mail.ru

ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ К ЗАДАЧАМ МИКРОЭКОНОМИКИ

АННОТАЦИЯ. На сегодняшний день теория потребления, равно как и другие разделы экономической теории, немыслима без широкого применения математического моделирования. Статья посвящена исследованию двух моделей из области микроэкономики, в которых осуществляется оптимальное распределение доходов физического лица с целью максимизации суммарного дисконтированного потребления за определенный период времени. Инструментами качественного анализа моделей являются необходимые условия оптимальности первого порядка в форме классического принципа максимума и качественная теория дифференциальных уравнений. Цель исследования — продемонстрировать эффективность данных инструментов для решения практических задач микроэкономики. Актуальность приложения математического аппарата для решения такого рода задач не ослабевает по сей день. В одной из рассмотренных в статье моделей найдена экстремаль принципа максимума с позиционным управлением. Дана экономическая интерпретация полученных результатов анализа обеих моделей. В первой модели выбор физическим лицом одной из двух стратегий, рекомендуемых ему, осуществляется на основе соотношения коэффициента дисконтирования потребления и темпа прироста его дохода. Во второй модели, являющейся модификацией первой, оптимальная стратегия выбирается в зависимости от начального уровня благосостояния субъекта.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Теория потребления, доход, математическая модель, оптимальное управление, принцип максимума.

ИНФОРМАЦИЯ О СТАТЬЕ. Дата поступления 20 декабря 2022 г.; дата принятия к печати 31 января 2023 г.; дата онлайн-размещения 3 марта 2023 г.

Original article

N.V. Antipina
Baikal State University, Irkutsk, Russian Federation, natant2012@mail.ru

APPLYING OPTIMAL CONTROL THEORY TO MICROECONOMIC PROBLEMS

ABSTRACT. Nowadays, the theory of consumption, as well as any other field of economic theory, is virtually impossible without applying extensively mathematical modeling. The article explores from microeconomics perspective two models in which optimal distribution of an individual's income is achieved, thus maximizing total discounted consumption over a certain period of time. The qualitative analysis of the models is carried out with such tools as the classical maximum principle, which corresponds to necessary conditions of optimality of the first order, and the qualitative theory of differential equations. The purpose of the study is to demonstrate efficacy of these tools when solving practical problems of microeconomics. Applying mathematical apparatus for solving such problems has always been relevant. The extremal of the maximum principle with positional control has been found in one of the models considered in the article. Both models have been analyzed and the economic interpretation of the obtained results has been given. In the first model, an individual's choice of either recommended strategies is determined by the ratio of the

© Антипина Н.В., 2023

consumption discount rate and the growth rate of their income. The second model, being a modification of the first one, implies that the optimal strategy is chosen according to the initial level of the subject's affluence.

KEYWORDS. Consumption theory, income, mathematical model, optimal management, maximum principle.

ARTICLE INFO. Received December 20, 2022; accepted January 31, 2023; available online March 3, 2023.

Введение

Первые исследования потребления восходят к П. Буагильбергу и Э. Кондильяку, которые в конце XVII в. изучали абстрактного потребителя, имеющего возможности приобретения товаров и услуг, предлагаемых на рынке [1, с. 10]. Однако несмотря на то, что теорию потребления относят к «ранним» разделам экономики, динамичность жизни и экономической теории диктует необходимость ее развития на основе комплексного междисциплинарного подхода. В связи с этим теория потребления «не стоит на месте», постоянно претерпевая трансформацию [2]. В конце XIX — начале XX в. были заложены основы поведения потребителя на уровне микроэкономики, и уже к концу XX в. появились мультидисциплинарные исследования в области потребления.

Экономико-математические модели возникают не автономно, а сообразно появлению экономических задач, в которых решение принимается на основе использования математического аппарата [2–6]. Это означает, что математическая модель является лишь инструментом решения прикладных задач. Отметим, что при моделировании важен не только изучаемый объект, но и лицо, заинтересованное в эффективном решении задачи и построении математической модели, — субъект моделирования. Роль субъекта моделирования оказывается решающей: его цели, интересы и предпочтения формируют модель.

Среди математических моделей выделяют оптимизационные [3; 6], имеющие общее свойство — определена цель (или несколько целей), для достижения которой часто приходится исследовать сложные системы для прогноза их состояния в зависимости от избираемых стратегий управления ими.

Исследованию именно такого типа моделей и посвящена статья. Для анализа моделей применяется аппарат теории оптимального управления [7, с. 54; 8] в комбинации с качественной теорией дифференциальных уравнений [8]. В одной из рассмотренных моделей найдена экстремаль принципа максимума с позиционным управлением [7, с. 38–53; 9, с. 16–19]. Полученные результаты анализа обеих моделей экономически интерпретированы.

1. Постановка микроэкономической задачи

Физическое лицо располагает в момент времени t финансовыми средствами в количестве $W(t)$. Темп прироста этих средств в течение временного периода $[0, T]$ постоянный и равный r. Начальный уровень благосостояния физического лица на момент времени $t = 0$ равен W_0.

Средства $W(t)$ субъекта частично расходуются на потребление набора благ и приобретение товаров. Так что доля располагаемого дохода $W(t)$, расходуемая субъектом на потребление равна $c(t)$, причем $0 \le c(t) \le 1$ в каждый момент времени t. Оставшиеся средства идут в накопление или на другие нужды. Желая учесть дисконтирование потребления в течение периода времени $[0, T]$, введем в рассмотрение параметр β — коэффициент дисконтирования потребления.

В рамках статьи рассмотрим два варианта постановки задачи.

Задача 1: требуется найти оптимальную стратегию поведения субъекта, на которой суммарное дисконтированное потребление достигнет максимума, а уровень его дохода в конце временного периода — значения W_T;

Задача 2: требуется найти оптимальную стратегию поведения субъекта, которая максимизирует не только суммарное дисконтированное потребление за временной период $[0, T]$, но и его удовлетворенность $F(W_T)$ от полученного им благосостояния по истечении этого периода.

2. Построение моделей

Поставленные в п. 1 задачи формализуются математически как оптимизационные модели. Перейдем к их построению.

Поскольку рост благосостояния $W(t)$ осуществляется за счет составляющей $rW(t)$, а его уменьшение — за счет потребления $c(t)$, то динамику финансовых средств субъекта описывает дифференциальное уравнение

$$\dot{W}(t) = rW(t) - c(t).$$

Более того, заданный начальный уровень благосостояния приводит к задаче Коши:

$$\dot{W}(t) = rW(t) - c(t), W(0) = W_0.$$

Цель субъекта в задаче 1 — максимизация суммарного дисконтированного потребления — выражается математически интегральным функционалом

$$J(W, c) = \int_0^T c(t)\, e^{-\beta t} dt \to max\,,$$

в задаче 2 — функционалом Больца

$$J(W, c) = \int_0^T c(t)\, e^{-\beta t} dt + F(W_T) \to max\,.$$

Таким образом, оптимизационная модель, соответствующая задаче 1, имеет вид

$$J = \int_0^T c(t)\, e^{-\beta t} dt \to max, \tag{1}$$

$$\dot{W}(t) = rW(t) - c(t), W(0) = W_0, W(T) = W_T, \tag{2}$$

$$0 \le c(t) \le 1,\ t \in [0,\ T]. \tag{3}$$

В задаче 2 введем дополнительные предположения на функцию удовлетворенности $F(W)$ субъекта: $F(W)$ — определенная и дифференцируемая на R^+, а также вогнутая возрастающая функция на этом промежутке, то есть $F'(W) > 0$, $F''(W) < 0$.

Тогда задача 2 формализуется в виде следующей модели:

$$J = \int_0^T c(t)\, e^{-\beta t} dt + F(W_T) \to max, \tag{4}$$

$$\dot{W}(t) = rW(t) - c(t),\ W(0) = W_0. \tag{5}$$

$$0 \le c(t) \le 1,\ t \in [0,\ T]. \tag{6}$$

Обе модели представляют собой задачи оптимального управления с ограниченным управлением $c(t)$.

3. Исследование модели 1

Проведем исследование модели (1)–(3) с помощью классического принципа максимума [9, с. 9; 10, с. 109].

Запишем функцию Понтрягина (аргумент t опустим для простоты восприятия)

$$H(t,\ W,\ c,\ \psi) = ce^{-\beta t} + \psi(rW - c)$$

и сопряженное уравнение

$$\dot{\psi} = -r\psi.$$

Решение этого уравнения

$$\psi(t) = \psi(0)e^{-rt}, \tag{7}$$

где значение $\psi(0)$ — произвольная константа, отличная от нуля.

Запишем условие максимума функции Понтрягина [10, с. 109] по управлению c, с учетом решения (7)

$$\overline{H} = \left(e^{-\beta t} - \psi\right)c = \left(e^{-\beta t} - \psi(0)e^{-rt}\right)c \to \max_{0 \le c \le 1}.$$

После вынесения множителя $e^{-\beta t}$ это условие запишется в виде

$$\left(1 - \psi(0)e^{(\beta - r)t}\right)c \to \max_{0 \le c \le 1}. \tag{8}$$

Очевидна линейная зависимость функции $\overline{H} = \left(1 - \psi(0)e^{(\beta - r)t}\right)c$ от c. Тогда условие максимума (8) дает оптимальное управление следующего вида

$$c^*(t) = \begin{cases} 0, & 1 - \psi(0)e^{(\beta - r)t} < 0, \\ 1, & 1 - \psi(0)e^{(\beta - r)t} > 0, \\ \forall c \in (0;\ 1), & 1 - \psi(0)e^{(\beta - r)t} = 0. \end{cases}$$

При рассмотрении поведения функции переключения $1 - \psi(0)e^{(\beta - r)t}$ выделим два случая.

1. $\beta < r$ При выполнении этого условия функция $e^{(\beta - r)t} > 0$ и убывает $\forall t \in [0;\ T]$. На поведение функции $\overline{H}$ еще оказывает влияние значение $\psi(0)$:

– если $\psi(0) < 0$, то $1 - \psi(0)e^{(\beta - r)t} > 0$, $\forall t \in [0;\ T]$, и на нем управление $c^*(t) \equiv 1$;

– если $0 < \psi(0) < 1$, то ситуация аналогична предыдущей;

– если $\psi(0) > 1$ то функция переключения возрастает и меняет знак «с минуса на плюс» слева направо. Значит, имеется единственный момент переключения управления $c(t)$

$$\tau = \frac{ln\,\psi(0)}{r - \beta}, \tag{9}$$

который находится из условия равенства нулю функции переключения. Очевидно, $\tau \in (0,\ T)$, если выполнено неравенство

$$1 < \psi(0) < e^{(r-\beta)T}. \quad (10)$$

Итак, при $\psi(0) < 1$ оптимально управление $c^*(t) \equiv 1$, $\forall t \in [0;\ T]$, а состояние процесса находится как решение задачи Коши (2):

$$W^*(t) = e^{rt}[W_0 + (e^{-rt} - 1)e^{rT}];$$

при $\psi(0) > 1$ оптимальное управление

$$c^*(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0; \tau), \\ 1, & t \in [\tau; T], \end{cases} \quad (11)$$

где τ определяется формулой (9).

Найдем вторую составляющую оптимального процесса — состояние динамической системы, соответствующее управлению (11):

– на полуинтервале $[0; \tau)$ при $c(t) = 0$ уравнение (2) представляет собой дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Таким образом, с учетом начального условия $W(0) = W_0$, имеем $W(t) = W_0 e^{rt}$. В силу непрерывности траектории в точке переключения τ, найдем

$$W(\tau) = W_0 e^{r\tau} = W_0 \psi(0)^{\frac{r}{r-\beta}}; \quad (12)$$

– на отрезке $[\tau;\ T]$ при $c(t) = 1$ фазовое уравнение

$$\dot{W}(t) - rW(t) = -1 \quad (13)$$

является линейным неоднородным дифференциальным уравнением 1-го порядка с постоянными коэффициентами. Решим его методом вариации произвольной постоянной [11, с. 98–101]. А именно, возьмем за основу решение соответствующего однородного уравнения, предполагая, что C есть некоторая непрерывно дифференцируемая функция аргумента t:

$$W(t) = C(t)e^{rt}. \quad (14)$$

Найдем функцию $C(t)$ из тех соображений, что (14) должно быть решением уравнения (13):

$$C'(t)e^{rt} + rC(t)e^{rt} - rC(t)e^{rt} = -1 \Rightarrow C'(t)e^{rt} = -1 \Rightarrow C'(t) = -e^{-rt}. \quad (15)$$

Путем интегрирования (15) получим искомую функцию $C(\mathrm{t}) = \frac{e^{-rt}}{r} + \widetilde{C}$ и подставим ее в (14):

$$W(t) = \left(\frac{e^{-rt}}{r} + \widetilde{C}\right)e^{rt} = \widetilde{C}e^{rt} + \frac{1}{r},$$

где $\widetilde{C}$ — произвольная константа, которую найдем, благодаря условию (12):

$$W(\tau) = \widetilde{C}e^{r\tau} + \frac{1}{r} = W_0 e^{r\tau} \Rightarrow \widetilde{C} = W_0 - \frac{e^{-r\tau}}{r}.$$

Решение задачи Коши (12), (13) на рассматриваемом временном отрезке$[\tau;\ T]$ определяется формулой

$$W(t) = W_0 e^{rt} - \frac{e^{r(t-\tau)}}{r}. \quad (16)$$

Таким образом, из «кусков» функций $W(t) = W_0e^{rt}$ и (16) составим оптимальную фазовую траекторию, соответствующую управлению (11), на всем временном отрезке $[0; T]$

$$W^*(t) = \begin{cases} W_0e^{rt}, & t \in [0; \tau), \\ W_0e^{rt} - \dfrac{e^{r(t-\tau)}}{r}, & t \in [\tau; T]. \end{cases} \quad (17)$$

Необходимость выполнения условия $W(T) = W_T$ на правом конце отрезка $[0; T]$, накладывает дополнительное условие на существование полученной экстремали

$$W_0e^{rT} - \frac{e^{r(T-\tau)}}{r} = W_T \Rightarrow W_0e^{rT} - \frac{1}{r}e^{rT}\psi(0)^{\frac{r}{\beta-r}} = W_T.$$

Из последнего соотношения находим

$$\psi(0) = e^{(r-\beta)T}[r(W_0e^{rT} - W_T)]^{r-\beta/T}.$$

Учитывая, что экстремаль (11), (17) получена при условии (10), имеем условие ее существования:

$$[r(W_0e^{rT} - W_T)]^{r-\beta/T} < 1. \quad (18)$$

2. $\beta > r$. Этот случай исследуется по аналогии с предыдущим. С той лишь разницей, что переключение оптимального управления происходит с $c(t) = 1$ на $c(t) = 0$. А именно, при $\psi(0) < 1$ оптимально управление $c^*(t) \equiv 0$, $\forall t \in [0; T]$, а состояние процесса на всем временном промежутке таково:

$$W^*(t) = W_0e^{rt};$$

при $\psi(0) > 1$ оптимальное управление

$$c^*(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0; \tau), \\ 0, & t \in [\tau; T], \end{cases} \quad (19)$$

где τ определяется формулой (9).

Найдем вторую составляющую оптимального процесса — состояние динамической системы, соответствующее управлению (19):

– на полуинтервале $[0; \tau)$ при $c(t) = 1$ для нахождения фазовой траектории снова применим метод вариации произвольной постоянной уже с начальным условием $W(0) = W_0$. Получим

$$W(t) = \left(W_0 - \frac{1}{r}\right)e^{rt} + \frac{1}{r}. \quad (20)$$

– на отрезке $[\tau; T]$ при $c(t) = 0$ получим, что задача Коши

$$\dot{W}(t) - rW(t) = 0, W(\tau) = \left(W_0 - \frac{1}{r}\right)e^{r\tau} + \frac{1}{r}$$

имеет следующее решение

$$W(t) = \left(W_0 - \frac{1}{r}\right)e^{rt} + \frac{e^{r(t-\tau)}}{r}. \quad (21)$$

Стыкуя функции (20) и (21) в точке τ, получим оптимальную фазовую траекторию, соответствующую управлению (19),

$$W^*(t) = \begin{cases} \left(W_0 - \dfrac{1}{r}\right) e^{rt} + \dfrac{1}{r}, & t \in [0; \tau), \\ \left(W_0 - \dfrac{1}{r}\right) e^{rt} + \dfrac{e^{r(t-\tau)}}{r}, & t \in [\tau; T]. \end{cases} \quad (22)$$

Выполнение условия $W(T) = W_T$ обеспечивает соотношение

$$\left(W_0 - \frac{1}{r}\right) e^{rt} + \frac{e^{r(T-\tau)}}{r} = W_T \Leftrightarrow \left(W_0 - \frac{1}{r}\right) e^{rt} + \frac{1}{r} e^{rT} \psi(0)^{\frac{r}{\beta - r}} = W_T.$$

Отсюда $\psi(0) = [r(W_T - W_0 e^{rT})e^{-rT} + 1]^{\beta - r/r}$.

Условия существования экстремали (19), (22) даются следующими соотношениями

$$W_0 e^{rT} < W_T. \quad (23)$$

Приведем экономическую интерпретацию полученных результатов исследования:

– если коэффициент дисконтирования β меньше темпа роста r дохода физического лица, и предельный вклад [12, с. 77–93] в дисконтированное потребление велик (выполнено условие (18)) , то рекомендуется до момента времени τ вести политику накопления, а затем, вплоть до конца рассматриваемого периода времени $[0; T]$, расходовать средства, так что их величина с момента τ будет уменьшаться до уровня W_T. Если же вклад в дисконтированное потребление мал, то в течение всего периода времени $[0; T]$ накопление средств не рекомендуется, и они расходуются исключительно на потребление;

– если коэффициент дисконтирования β превышает темп роста r богатства потребителя и предельный вклад в дисконтированное потребление велик (выполнено условие (23)) , то рекомендуется до момента времени τ осуществлять приобретение товаров и благ, а на заключительном временном этапе, осуществлять сбережения. При этом средства потребителя достигнут уровня W_T. Если же вклад в дисконтированное потребление мал, то в течение всего периода времени $[0; T]$ рекомендуется придерживаться политики сбережения средств.

4. Исследование модели 2

Перейдем к исследованию модели (4)–(6). Отметим, что замена интегрального функционала (1) смешанным функционалом (4) и отказ от «закрепленности» правого конца траектории, привели к усложнению качественного анализа модели. В результате исследование модели 2 проведено с помощью теории синтеза оптимальных управлений [10, с. 16–19].

По аналогии с исследованием модели 1, начнем с применения классического принципа максимума. Функция Понтрягина имеет вид

$$H(t, W, c, \psi) = ce^{-\beta t} + \psi(rW - c)$$

и сопряженное уравнение таково:

$$\dot{\psi} = -H'_W = -r\psi, \ \psi(T) = F'(W_T). \quad (24)$$

Легко видеть, что общее решение

$$\psi(t) = C_0 e^{-rT}. \quad (25)$$

сопряженного уравнения (24) непрерывно на отрезке $[0; T]$.

Найдем C_0 из условия трансверсальности (24):

$$\psi(T) = C_0 e^{-rT} = F'(W_T) \Rightarrow C_0 = F'(W_T)e^{rT}. \quad (26)$$

В силу возрастания функции $F(W)$, $C_0 > 0$.

Из (25) и (26) получим сопряженную переменную

$$\psi(t) = F'(W_T)e^{r(T-t)}, \quad (27)$$

которая, очевидно, положительна и убывает на отрезке $[0; T]$.

Запишем условие максимума понтрягиана по управлению c:

$$\overline{H} = \left(e^{-\beta t} - \psi\right)c \to \max_{0 \le c \le 1}.$$

Экстремальное управление имеет вид

$$c^*(t) = \begin{cases} 0, & \psi > e^{-\beta t}, \\ 1, & \psi < e^{-\beta t}, \\ \forall c \in (0; 1), & \psi = e^{-\beta t}. \end{cases} \quad (28)$$

Подставив в (28) сопряженную функцию (27), имеем

$$c^*(t) = \begin{cases} 0, & F'(W_T)e^{rT}e^{(\beta - r)t} > 1, \\ 1, & F'(W_T)e^{rT}e^{(\beta - r)t} < 1, \\ \forall c \in (0; 1), & F'(W_T)e^{rT}e^{(\beta - r)t} = 1. \end{cases} \quad (29)$$

Всюду ниже будем предполагать, что $\beta < r$. С учетом этого факта и вогнутости функции $F(W)$, делаем вывод о строгом убывании функции

$$F'(W_T)e^{rT} e^{(\beta - r)t} - 1 \quad (30)$$

на отрезке $[0; T]$. Поскольку строго убывающая функция способна менять знак не более одного раза, то участок особого управления [9, с. 35–38] отсутствует, и управление (29) может иметь не более одного переключения.

К этому моменту принцип максимума исчерпал свои возможности. Поэтому для дальнейшего исследования проведем анализ интегральных кривых дифференциального уравнения (5).

Итак, управление $c^*(t)$ может переключаться с 0 на 1 (или с 1 на 0), переходя через кривую переключения, определяемую равенством

$$F'(W_T)e^{rT} e^{(\beta - r)t} = 1. \quad (31)$$

Для нахождения оптимального конечного значения W_T^* рассмотрим концевое множество расширенного фазового пространства. Кривая (31) в точке $t = T$ имеет вид

$$F'(W_T^*)e^{\beta T} = 1 \quad (32)$$

и делит это множество (при $t = T$) на две части точкой W_T^*. Оптимальное значение W_T^* находится из (32).

Построим интегральные кривые уравнения (5) [8, с. 13]. Управление $c(t)$ кусочно-постоянно и способно принимать только 2 значения: 0 и 1. Значит, фазовые

 DOI 10.17150/2411-6262.2023.14(1).287-298

траектории представляют собой графики экспонент. При различных начальных условиях и знаках коэффициента r интегральные кривые характеризуются экспоненциальным ростом или экспоненциальным снижением.

При $c(t) = 0$ фазовая траектория такова: $W(t) = C_1e^{rt}$, где $C_1 > 0$ — произвольная постоянная. Движение по этим траекториям идет снизу вверх.

Найдем $W(t)$ при $c(t) = 1$. Для этого интегрируем уравнение $\dot{W} = rW - 1$:

$$\frac{\dot{W}}{rW-1} = 1 \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(ln|rW-1|) = 1 \Rightarrow |rW-1| = C_2e^{rt}.$$

Легко видеть, что $W(t) = \frac{1}{r} + C_2\, e^{rt}$ (C_2 — произвольная постоянная). Движение по этим траекториям идет сверху вниз. Отметим, что при $C_2 = 0$, $W(t) = \frac{1}{r} = const$.

Далее возможно несколько вариантов поведения фазовой траектории.

Вариант 1: $W(T) < W_T{}^*, W_0 \leq \frac{1}{r}$. В силу строгого убывания функции (30), управление $c^*(t) \equiv 0$ а фаза $W^*(t) = W_0e^{rt}$ на всем отрезке $[0;\ T]$. Переключение управления отсутствует. Поведение интегральных кривых в случае варианта 1 отражено на рис. 1.

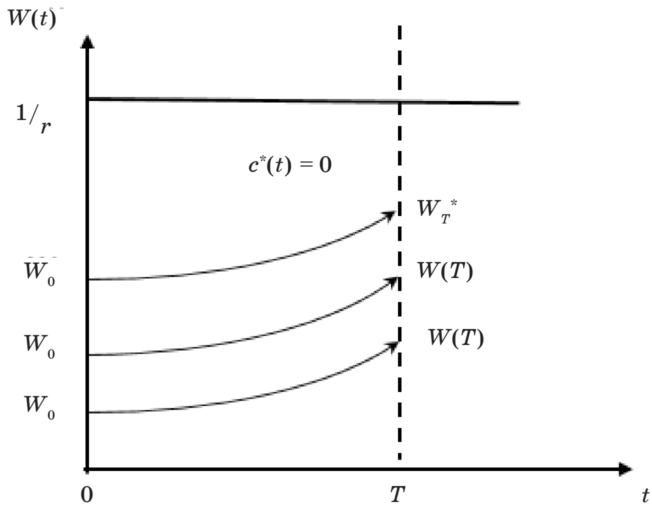

Рис. 1. Фазовая картина в случае варианта 1

Вариант 2: $W(T) \geq W_T{}^*$. Этот вариант предполагает наличие одного переключения управления, причем только с 0 на 1. Найдем момент переключения τ логарифмированием соотношения (31):

$$lnF'(W_T) + rT + (\beta - r)t = 0 \Rightarrow \tau = \frac{ln\,F'(W_T) + rT}{r - \beta}. \tag{33}$$

Отметим, что этот момент «плавающий» (зависит от значения W_T) и $\tau \in (0,\ T)$ благодаря предположениям задачи 2.

При $c^*(t) = 0$ фазовая траектория $W^*(t) = W_0{}^*e^{rt}$, а при $c^*(t) = 1$ она находится интегрированием дифференциального уравнения (5) на промежутке $[\tau, T]$.

Таким образом, любой фазовой траектории $W^*(t)$, исходящей из точки W_0, расположенной ниже кривой переключения (31), соответствует оптимальное управление

$$c^*(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \tau), \\ 1, & t \in [\tau, T]. \end{cases}$$

Переключение управления происходит при переходе фазовой траектории через кривую (31) в точке τ, определяемой соотношением (33). Поведение интегральных кривых в случае варианта 2 отражено на рис. 2.

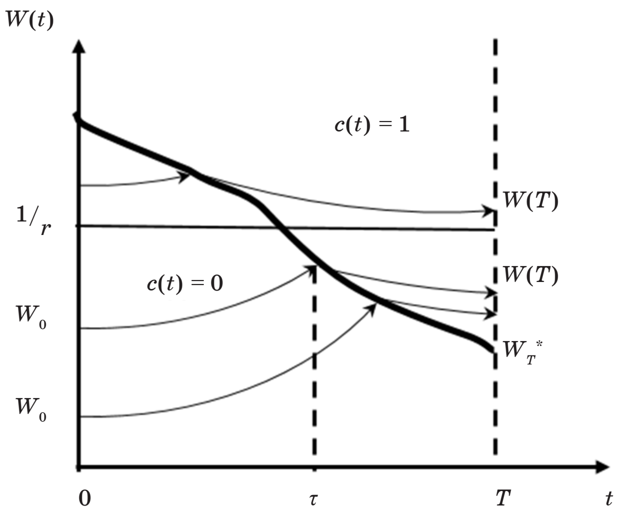

Рис. 2. Фазовая картина в случае варианта 2

Экономическая интерпретация результатов такова:

– если начальный уровень W_0 благосостояния физического лица невелик $(W_0 < \frac{1}{r})$, то в течение всего периода времени $[0; T]$ соблюдается режим экономии средств: потребление благ осуществляется за счет других источников (например, взятие долга). Как следствие, к моменту времени T степень удовлетворенности от имеющегося на этот момент уровня благосостояния мала;

– при достаточном начальном уровне дохода физического лица рекомендуется до момента времени τ накопление, а затем можно позволить потребление благ и товаров. При этом средства потребителя с момента τ будут уменьшаться, но не упадут ниже $W_T{}^*$.

Список использованной литературы

1. Соколов И.К. Прогнозирование поведения потребителя на рынке продуктов питания работы : дис. ... канд. экон. наук : 08.00.05 / И.К. Соколов. — Санкт-Петербург, 2020. — 157 с.

2. Тагаров Б.Ж. Специфика экономики совместного потребления и условия ее развития / Б.Ж. Тагаров. — EDN HMSLQI // ЭКО. — 2019. — № 7. — С. 140–155.

3. Аксенюшкина Е.В. Решение задачи оптимизации расхода сбережений на основе принципа максимума / Е. В. Аксекнюшкина. — DOI 10.18101/2304-5728-2018-1-3-18. — EDN YUOVJX // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. — 2018. — № 1. — С. 3–18.

4. Баенхаева А.В. Моделирование валового регионального продукта Иркутской области на основе применения методики множественного оценивания регрессионных параметров / А.В. Баенхаева, М.П. Базилевский, С.И. Носков. — EDN WWRKMV // Фундаментальные исследования. 2016. — № 10-1. — С. 9–14.

5. Волченко Л.Ю. Моделирование влияния деятельности таможенных органов на социально-экономическое развитие и инвестиционную активность регионов / Л.Ю. Волченко, Н.В. Мамонова, Е.О. Завьялова. — EDN YPOWZZ // Инновационное развитие экономики. — 2017. — № 6 (42). — С. 16–26.

6. Шуплецов А.Ф. Моделирование оптимальной стратегии развития предпринимательской деятельности промышленной компании на основе эффективного использования потенциала нематериальных ресурсов / А.Ф. Шуплецов, П.В. Харитонова. — EDN RSYUUF // Известия Иркутской государственной экономической академии (Байкальский государственный университет экономики и права). — 2013. — № 6. — С. 8.

7. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления / В.Г. Болтянский. — Москва : Книга по Требованию, 2012. — 408 с.

8. Arrowsmith D.K. Ordinary Differential Equations: A Qualitative Approach with Applications / D.K. Arrowsmith, C.M. Place. — London : Chapman and Hall, 1982. — 250 p.

9. Специальные разделы теории управления. Оптимальное управление динамическими системами : учеб. пособие / Ю.Ю. Громов, Н.А. Земской, А.В. Лагутин [и др.]. — Тамбов : Изд-во Тамбовского гос. техн. ун-та, 2007. — 106 с.

10. Зеликин М.И. Оптимальное управление и вариационное исчисление / М.И. Зеликин. — Москва : УРСС, 2004. — 160 с.

11. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений : учеб. пособие / Н.М. Матвеев. — Санкт-Петербург : Лань, 2003. — 832 с.

12. Дыхта В.А. Оптимальное управление в экономике: простейшие модели : учеб. пособие / В.А. Дыхта, Н.В. Антипина, О.Н. Самсонюк. — Иркутск : Изд-во ИГУ, 1998. — 115 с.

References

1. Sokolov I.K. Prediction of Consumer Behavior at the Grocery Market.: Cand. Diss. Saint-Petersburg, 2020. 157 p.

2. Tagarov B.Zh. The Specifics of Sharing Economy and Conditions of its Development. EKO = ECO, 2019, no.7, pp. 140–155. (In Russian). EDN: HMSLQI.

3. Aksenyushkina E.V. Solution of the Problem of Optimal Consumption and Saving Based on the Maximum Principle. Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika, informatika = Bulletin of the Buryat State University. Mathematics, Informatics, 2018, no. 1, pp. 3–18. (In Russian). EDN: YUOVJX. DOI: 10.18101/2304-5728-2018-1-3-18.

4. Baenkhaeva A.V., Bazilevskii M.P., Noskov S.I. Modeling of Gross Regional Product Irkutsk Region on the Basis of Methods of Multiple Estimation of Regression Parameters. Fundamental'nye issledovaniya = Fundamental research, 2016, no. 10-1, pp. 9–14. (In Russian). EDN: WWRKMV.

5. Volchenko L.Yu., Mamonova N.V., Zav'yalova E.O. Modeling an Impact of Customs Agencies on Socioeconomic Development and Investing Rates of Regions. Innovatsionnoe razvitie ekonomiki = Innovative Development of Economy Journal, 2017, no. 6, pp. 16–26. (In Russian). EDN: YPOWZZ.

6. Shupletsov A.F., Kharitonova P.V. Modeling an Optimal Strategy of Company Business Development on the Basis of Efficient Utilization of the Non-Tangible Resources. Izvestiya Irkutskoy gosudarstvennoy ekonomicheskoy akademii (Baykalskiy gosudarstvennyy universitet ekonomiki i prava) = Izvestiya of Irkutsk State Economics Academy (Baikal State University of Economics and Law), 2013, no. 6, pp. 8. (In Russian). EDN: RSYUUF.

7. Boltyanskii V.G. Mathematical Methods of Optimal Management. Moscow, Kniga po Trebovaniyu Publ., 2012. 408 p.

8. Arrowsmith D.K., Place C.M. Ordinary Differential Equations: A Qualitative Approach with Applications. London, Chapman and Hall, 1982. 250 p.
9. Gromov Yu.Yu., Zemskoi N.A., Lagutin A.V., Ivanova O.G., Tyutyunnik V.M. Special Sections of the Theory of Management. Optimal Management of Dynamic Systems. Tambov State Technical University Publ., 2007. 108 p.
10. Zelikin M.I. Optimal Management and Calculus of Variations. Moscow, URSS Publ., 2004. 160 p.
11. Matveev N.M. Methods of Integrating Ordinary Differential Equations. Saint-Petersburg, Lan Publ., 2003. 832 p.
12. Dykhta V.A., Antipina N.V., Samsonyuk O.N. Optimal Management in Economics: The Simplest Models. Irkutsk State University Publ., 1998. 115 p.

Информация об авторе

Антипина Наталья Валерьевна — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математических методов и цифровых технологий, Байкальский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация, natant2012@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-6948-6729, SPIN-код: 6204-5649, Scopus Author ID: 6701699991.

Author

Natalya V. Antipina — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematical Methods and Digital Technology, Baikal State University, Irkutsk, Russian Federation, natant2012@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-6948-6729, SPIN-Code: 6204-5649, Scopus Author ID: 6701699991.

Для цитирования

Антипина Н.В. Приложение теории оптимального управления к задачам микроэкономики / Н.В. Антипина. — DOI 10.17150/2411-6262.2023.14(1).27.287-298. — EDN UXBBBU // Baikal Research Journal. — 2023. — Т. 14, № 1. — С. 287–298.

For Citation

Antipina N.V. Applying Optimal Control Theory to Microeconomic Problems. *Baikal Research Journal*, 2023, vol. 14, no. 1, pp. 287–298. (In Russian). EDN: UXBBBU. DOI: 10.17150/2411-6262.2023.14(1).27.287-298.