Научная статья
УДК 517.977.5, 51.77
EDN OYDCBV
DOI 10.17150/2411-6262.2022.13(3).29

Н.В. Антипина
Байкальский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация, natant2012@mail.ru

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАПИТАЛА

АННОТАЦИЯ. В современном мире инвестиции являются важнейшим средством, создающим условия экономического развития страны, внедрения новейших технологий (в том числе, популярных на сегодняшний день, цифровых) и повышающим количественные и качественные показатели экономической деятельности на микро- и макроуровнях. Вовлечение в инвестиционный процесс инвесторов, имеющих даже небольшие сбережения, является первостепенной задачей, поскольку, в целом, они могут обеспечить экономике страны значительные инвестиционные ресурсы.
Предложение на финансовом рынке в основном определяется сбережениями домохозяйств, которые, в свою очередь, тесно связаны с потребительскими расходами. В связи с постоянным интересом к инвестициям и потреблению – двум базовым составляющим совокупных расходов в экономике – представляется возможным подойти к вопросу их наилучшего распределения посредством экономико-математического моделирования.
В статье рассматривается модель оптимального распределения капитала и потребления при наличии бюджетного ограничения и приводится ее качественный анализ с использованием аппарата теории оптимального управления.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Автономное потребление, инвестиции, качественный анализ, оптимальное управление, производственная функция.

ИНФОРМАЦИЯ О СТАТЬЕ. Дата поступления 30 мая 2022 г.; дата принятия к печати 29 июля 2022 г.; дата онлайн-размещения 31 августа 2022 г.

Original article

N.V. Antipina
Baikal State University, Irkutsk, Russian Federation, natant2012@mail.ru

QUALITATIVE ANALYSIS OF THE OPTIMIZATION MODEL OF CAPITAL'S DISTRIBUTION

ABSTRACT. In the modern world, investments are the most important means that create conditions for the economic development of the country, introduce latest technologies (including digital ones that are popular today) and increase the quantitative and qualitative indicators of economic activity at the micro and macro levels. Inclusion of investors with small savings in the investment process is a paramount task, because they can provide the country's economy with significant investment resources.
Household savings determine supply in the financial market, which, in turn, is linked to consumer spending. Due to the constant interest in investment and consumption - two basic components of total expenditure in the economy - it seems possible to approach the issue of their best distribution through economic and mathematical modeling.
The article considered the model of optimal distribution of capital and consumption in the presence of a budget limits and provides its qualitative analysis using the apparatus of the theory of optimal control.

KEYWORDS. Autonomous consumption, investments, qualitative analysis, optimal control, production function.

ARTICLE INFO. Received May 30, 2022; accepted July 29, 2022; available online August 31, 2022.

Введение

Задача определения оптимального соотношения инвестиций и потребления актуальна со времен появления экономической теории и до сих пор [1; 2, с. 6–223]. В той же мере популярно и экономико-математическое моделирование, позволяющее исследовать такого рода задачи посредством математического аппарата [3–8]. На потребление и сбережения оказывает влияние один и тот же ряд факторов (уровень дохода, уровень налогов и т.д.), потому что эти два понятия всегда взаимосвязаны, причем при фиксированном доходе с увеличением потребления уменьшается сбережение, и наоборот.

Таким образом, рассматривая вопрос о соотношении потребления и инвестиций, мы, с одной стороны, ведем речь идет о спросе на услуги и товары, обусловленные их ценностью для потребителя, а с другой стороны, говорим о спросе на активы (акции, облигации и т.п.), которые не приносят полезности их владельцу в явном виде, но способны принести доход в будущем, например, в виде дивидендов или доходов от перепродажи.

При использовании экономико-математического моделирования для решения поставленного вопроса, отметим, что достижение наибольшего спроса на товар — это фактически решение задачи максимизации полезности потребителя, а фундаментальное свойство активов — приносить доход в будущем — означает, что они должны включаться в бюджетное ограничение, учитывающее все доходы потребителя, в том числе и от обладания активами.

Все вышеизложенное приводит к возможности построения и исследования оптимизационной модели распределения капитала, которая обладает рядом особенностей:

– аргументами функции полезности являются объемы потребления блага в разные периоды времени;

– бюджетное ограничение имеет динамический характер: если потребитель имеет возможность накапливать богатство, потребление может быть выше текущего дохода;

– тот факт, что весь текущий доход не используется на потребление, не является ситуацией нерационального использования доступных средств.

Результаты качественного анализа модели интерпретированы экономически, а также потребителю даны рекомендации по оптимальному распределению его средств в зависимости от значений параметров модели.

Постановка задачи и описание экономико-математической модели

Пусть потребитель располагает в момент времени t финансовыми средствами в количестве $W(t)$, которые растут с течением времени с постоянным темпом r В начальный момент времени $t = 0$ начальный капитал $K(0)$ в сумме с уровнем активов $A(0)$ составляет величину W_0; в конечный момент времени $t = T$ потребитель желает иметь в наличии средства $K(T) + A(T)$ не ниже уровня W_T. В каждый момент времени $t \in (0;\ T)$ его финансовые средства распределяются на долю в инвестиции $K(t) + A(t)$ и долю на потребление $c(t)$, и выполняется условие $0 \leq c(t) \leq 1$. Параметр $\beta > 0$ имеет смысл субъективной нормы дисконтирования потребления, или параметр склонности к расходам.

У потребителя может вложить средства в капитал $K(T)$ или в активы $A(T)$. Представление о распределении средств дается бюджетным ограничением

$$\dot{K}(t) + \dot{A}(t) = rA(t) - c(t),$$

которое имеет следующий экономический смысл: поток инвестиций в каждый момент времени t увеличивается за счет процентов на активы в размере $rA(t)$ и уменьшается из-за текущего потребления $c(t)$.

Функция $U(c)$ — это функция полезности от потребления блага — непрерывной и дифференцируема на R^+. Кроме того, она является строго возрастающей и обладает свойством убывающей предельной полезности: $U'(c) > 0$, $U''(c) < 0$, $U'(0) = -\infty$. Значения T, β, r, W_0 и W_T заданы и положительны.

Задача состоит в максимизации дисконтированного потребления за временной период $[0, T]$ так, чтобы к концу этого периода средства потребителя стали не меньше, чем W_T.

С учетом введенных обозначений и предположений, поставленная задача математически формализуется в виде следующей оптимизационной модели:

$$J = \int_0^T U(c(t))\, e^{-\beta t}\, dt \to max, \tag{1}$$

$$\dot{K}(t) + \dot{A}(t) = rA(t) - c(t), \tag{2}$$

$$K(0) + A(0) = W_0,\ K(T) + A(T) \geq W_T, \tag{3}$$

$$0 \leq \mathrm{c}(t) \leq 1,\ t \in [0, T]. \tag{4}$$

Модель (1)–(4) представляет собой задачу оптимального управления, специфичную наличием смешанного дифференциального уравнения (2) и смешанных граничных условий (3). Функции $K(T)$ и $A(T)$ являются фазовыми траекториями, а $c(t)$ — управлением, ограниченным на промежутке $[0, T]$.

Методы и результаты исследования

Приступим к исследованию модели (1)–(4). Введем обозначение $\dot{K} = u$ и преобразуем дифференциальное соотношение (2) к системе дифференциальных уравнений:

$$\dot{A}(t) = rA(t) - u(t) - c(t), \tag{5}$$
$$\dot{K}(t) = u(t).$$

Заметим, что, в отличие от управления $c(t)$, новое управление $u(t)$ может принимать отрицательные значения, что экономически соответствует убыванию капитала и означает, что рост капитала, как и его преобразование в продукт потребления, не может быть мгновенным.

Проведем исследование модели (1), (3)–(5) с помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина [9, с. 9; 10, с. 109; 11].

Выпишем соотношения принципа максимума [10, с. 109; 11, с. 36], опустив для простоты аргумент t:

понтрягиан —

$$H(t, K, A, c, u, \psi_1, \psi_2) = U(c)e^{-\beta t} + \psi_1(rA - u - c) + \psi_2 u, \tag{6}$$

сопряженная система

$$\dot{\psi}_1 = -r\psi_1,\ \dot{\psi}_2 = 0. \tag{7}$$

Решение первого сопряженного уравнения этой системы имеет вид

$$\psi_1(t) = \psi_1(0)e^{-rt}, \tag{8}$$

где значение $\psi_1(0)$ — произвольная константа. Сопряженная переменная $\psi_2 = \overline{\psi_2} = const$.

Запишем условие максимума функции Понтрягина (6) по управлениям c и u, с учетом вида (8) сопряженной переменной

$$\overline{H}_c = U(c)e^{-\beta t} - \psi_1 c = U(c)e^{-\beta t} - \psi_1(0)e^{-rt}c \rightarrow \max_{0 \le c \le 1}. \tag{9}$$

$$\overline{H}_u = (-\psi_1(0)e^{-rt} + \overline{\psi_2})u \rightarrow \max_{|u| \le 1}. \tag{10}$$

После вынесения множителя $e^{-\beta t}$ условие (9) запишется в виде

$$U(c) - \psi_1(0)e^{(\beta - r)t}c \rightarrow \max_{0 \le c \le 1}. \tag{11}$$

Для нахождения экстремали задачи исследуем поведение функций переключения $\overline{H}_c$ и $\overline{H}_u$ в зависимости от соотношений между параметрами модели. Очевидно, функция переключения в общем случае, не линейна по управлению c, а функция $\overline{H}_u$ линейна по u.

Начнем анализ функции $\overline{H}_u$. Из (10) найдем компоненту $u^*(t)$ экстремального управления:

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & -\psi_1(0)e^{-rt} + \overline{\psi_2} < 0, \\ 1, & -\psi_1(0)e^{-rt} + \overline{\psi_2} > 0, \\ \forall u \in (-1;\ 1), & \overline{\psi_2} = \psi_1(0)e^{-rt}. \end{cases} \tag{12}$$

Выясним, существует ли магистральный участок $\Delta = \left\{t \in [0; T] \,\middle|\, \dot{\overline{H}}_u = 0\right\}$ по компоненте управления u. Из условия (12) получим уравнение

$$\overline{\psi_2} = \psi_1(0)e^{-rt}, \tag{13}$$

которое имеет единственное решение Это означает, что предположение о существовании магистрального участка неверно, поскольку, если он существует, то должен занимать большую часть отрезка $[0;\ T]$, и момент t^* — это момент переключения управления u. Отметим, что t^* существует, если имеет место неравенство

$$\overline{\psi_2} \le \psi_1(0) \le \overline{\psi_2}e^{rT}. \tag{14}$$

Из первого дифференциального уравнения сопряженной системы (7) следует, что сопряженная переменная ψ_1 являются убывающей функцией на отрезке $[0;\ T]$. Тогда из условия (12) получаем компоненту экстремали

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0;\ t^*], \\ 1, & t \in (t^*;\ T]. \end{cases}$$

Теперь обратимся к функции $\overline{H}_c$. Нахождение критических точек функции (11) приводит к равенству

$$U'(c) = \psi_1(0)e^{(\beta - r)t}, \tag{15}$$

из которого следует, что $\psi_1(0) > 0$ и $\beta > r$ (в силу предположения $U'(c) > 0$). Из соотношения (15) находим компоненту управления $c^*(t) = (t, \psi_1(0))$ на отрезке $[0, T]$.

На этом этапе качественного анализа отметим, что искомая экстремаль будет являться оптимальной, поскольку функция Понтрягина (6) вогнута по совокупности переменных K, A, c, u, и сопряженные переменные ψ_1, ψ_2 положительны (то есть принцип максимума является необходимым и достаточным условием оптимальности).

Из условий трансверсальности следует, что терминальное ограничение (3) обращается в равенство

$$K(T) + A(T) = W_T. \tag{16}$$

Так как $\beta > r$, то функция (11) немонотонна по c и может иметь максимум, принадлежащий отрезку $[0; 1]$. Далее, в силу вогнутости функции $U(c)$ возможны 2 случая:

1) если $0 \le c^*(t) = c(t, \psi_1(0)) \le 1$, то она максимизирует функцию $\overline{H}_c$ и убывает на отрезке $[0, T]$;

2) если же $c^*(t) \notin [0; 1]$, то ее максимум достигается при $c^*(t) \equiv 0$ на $[0, T]$.

Оба случая возможны при выполнении условия (14).

Далее анализируя систему (5), приходим к следующим выводам (выкладки опустим в силу их громоздкости):

– в случае 1) $K(t)$ убывает на начальном этапе рассматриваемого временного промежутка $[0, T]$ до момента переключения t^*, а после него до $t = T - K(t)$ наоборот, возрастает. Что касается функции $A(t)$, то она возрастает на всем отрезке $[0, T]$, но с момента времени t^* она растет с меньшей скоростью за счет $u^*(t) = 1$.

Структура оптимального решения следующая: $u^*(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0; t^*], \\ 1, & t \in (t^*; T]. \end{cases}$, $c^*(t)$находится из уравнения (15) при конкретизации функции $U(c)$, соответствующие им фазовые траектории $A^*(t)$ и $K^*(t)$ легко отыскать путем решения системы (5), с учетом условий (3) и (16).

– в случае 2) поведение $K(t)$ такое же, как в случае 1), $A(t)$ также возрастает на всем отрезке $[0, T]$, но ее рост медленнее, чем в случае 1).

При этом структура оптимали такова: $u^*(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0; t^*], \\ 1, & t \in (t^*; T]. \end{cases}$, $c^*(t) \equiv 0$, на $[0, T]$, соответствующие им фазовые траектории $K^*(t)$ и $A^*(t)$ находятся по аналогии со случаем 1).

В заключении приведем экономическую интерпретацию полученного исследования модели: если коэффициент дисконтирования β превышает процентную ставку r на активы $A(t)$ то возможны две стратегии поведения потребителя.

Стратегия 1: рекомендуется большую часть имеющихся средств вкладывать в активы $A(t)$ и накапливать капитал $K(t)$, начиная с момента t^*, вплоть до момента T, на фоне уменьшения текущего потребления $c(t)$ на протяжении всего периода времени $[0, T]$.

Стратегия 2: на начальном этапе распределения средств необходимо сделать ставку на увеличение активов $A(t)$, затем — на рост капитала $K(t)$ до конца рассматриваемого временного периода, на фоне отсутствия потребления $c(t)$.

Таким образом, потребителю рекомендуется придерживаться политики накопления, а именно — в качестве оптимальной стратегии выбрать стратегию 1, поскольку вариант отказа от потребления товаров и услуг при отсутствии дополнительного дохода нереалистичен.

Заключение

В вопросах, касающихся оптимального распределения этих средств на потребление и инвестиционные вложения, важен аспект выявления экономических факторов, влияющих на их динамику. Поэтому актуальным по сей день является использование экономико-математического моделирования и применение математического аппарата для исследования таких моделей.

В статье рассмотрена задача определения оптимального соотношения текущего потребления и инвестиций, приведена ее математическая формализация в виде экономико-математической модели, а также проведен ее качественный анализ на основе классического принципа максимума, и найдена оптимальная, рекомендованная потребителю, стратегия.

Список использованной литературы

1. Рощина Я. М. Социология потребления : учеб. пособие / Я. М. Рощина. — Москва : Изд. дом ГУ ВШЭ, 2007. — 447 с.

2. Веселов Д.А. Макроэкономика финансовых рынков : учебник / Д.А. Веселов, С.Э. Пекарский. — Москва : Изд-во ВШЭ, 2011. — 255 с.

3. Аксенюшкина Е.В. Решение одной задачи оптимального распределения ресурсов / Е.В. Аксенюшкина. — DOI 10.18101/2304-5728-2019-1-3-12. — EDN NKZSLC // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. — 2019. — № 1. — С. 3–12.

4. Аксенюшкина Е.В. Анализ налогообложения по кадастровой стоимости и определение оптимальной стратегии поведения государства с использованием аппарата теории игр / Е.В. Аксенюшкина, П.Г. Сорокина. — DOI 10.18101/2304-4446-2018-3-3-15. — EDN YGGGEX // Вестник Бурятского государственного университета. Экономика и менеджмент. — 2018. — № 3. — С. 3–15.

5. Леонова О.В. Моделирование процессов убытков страховщика с помощью вероятностных распределений на примере страховой компании РОСГОССТРАХ / О.В. Леонова, П.Г. Сорокина. — DOI 10.17150/2411-6262.2017.8(4).27. — EDN YNLOGW // Baikal Research Journal. — 2017. — Т. 8, № 4. — URL: http://brj-bguep.ru/reader/article. aspx?id=21915.

6. Шуплецов А.Ф. Моделирование оптимальной стратегии развития предпринимательской деятельности промышленной компании на основе эффективного использования потенциала нематериальных ресурсов / А.Ф. Шуплецов, П.В. Харитонова. — EDN RSYUUF // Baikal Research Journal. — 2013. — Т. 8, № 6. — URL: http://brj-bguep. ru/reader/article. aspx?id=18651.

7. Ованесян С.С. Модель оптимизации налоговой нагрузки отраслей региона / С.С. Ованесян, Н.И. Черхарова. — EDN OLEZMC // Baikal Research Journal. — 2013. — Т. 8, № 2. — URL: http://brj-bguep.ru/reader/article.aspx?id=17282.

8. Friedman M.A. Theory of the Consumption Function / M.A. Friedman. — Princeton, 1957. — 125 p.

9. Сотсков А.И., Колесник Г.В. Оптимальное управление в примерах и задачах. — Москва : Рос. экон. шк., 2002. — 58 с.

10. Лагоша Б.А. Оптимальное управление в экономике: теория и приложения : учеб. пособие / Б.А. Лагоша, Т.Г. Апалькова. — Москва : Финансы и статистика, 2008. — 224 с.

11. Специальные разделы теории управления. Оптимальное управление динамическими системами : учеб. пособие / Ю.Ю. Громов, Н.А. Земской, А.В. Лагутин [и др.]. — Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2007. — 108 с.

References

1. Roshchina Ya.M. *Sociology of Consumption*. Moscow, The Higher School of Economics Publ., 2007. 447 p.

2. Veselov D.A., Pekarskij S.Je. *Макроэкономика финансовых рынков*. Moscow, The Higher School of Economics Publ., 2011. 255 p.

3. Aksenyushkina E.V. Solution for a Problem of Optimal Allocation of Resources. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika, informatika = Bulletin of the Buryat State University. Mathematics, Informatics,* 2019, no. 1, pp. 3–12. (In Russian). EDN: NKZSLC. DOI: 10.18101/2304-5728-2019-1-3-12.

4. Aksenyushkina E.V., Sorokina P.G. Analysis of Taxation by Cadastral Value and Determination of the Optimal Strategy of State Behavior Using the Machinery of Game Theory. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta. Ekonomika i menedzhment = Bulletin of the Buryat State University. Economics and Management*, 2018, no. 3, pp. 3–15. (In Russian). EDN: YGGGEX. DOI: 10.18101/2304-4446-2018-3-3-15.

5. Leonova O.V., Sorokina P.G. Modeling the Insurer's Loss Processes with the Help of Probability Distributions in Terms of Rosgosstrakh Insurance Company. *Baikal Research Journal*, 2017, vol. 8, no. 4. (In Russian). EDN: YNLOGW. DOI: 10.17150/24116262.2017.8(4).27.

6. Shupletsov A.F., Kharitonova P.V. Modeling an Optimal Strategy of Company Business Development on the Basis of Efficient Utilization of Non-Tangible Resources. *Baikal Research Journal*, 2013, vol. 8, no. 6. (In Russian). EDN: RSYUUF.

7. Ovanesyan S.S., Cherkharova N.I. A Model of Optimizing Tax Burden on Regional Industries. *Baikal Research Journal*, 2013, vol. 8, no. 2. (In Russian). EDN: OLEZMC.

8. Friedman M.A. *Theory of the Consumption Function*. Princeton, 1957. 125 p.

9. Sotskov A.I., Kolesnik G.V. *Optimal Control in Examples and Problems*. Moscow, Rossiiskaya Ekonomicheskaya Shkola Publ., 2002. 58 p.

10. Lagosha B.A., Apalkova T.G. *Optimal Control in Economics: Theory and Appendices*. Moscow, Finansy i Statistika Publ., 2008. 224 p.

11. Gromov Yu.Yu., Zemskoi N.A., Lagutin A.V., Ivanova O.G., Tyutyunnik V.M. Special Branches of Management Theory. Optimal Control of Dynamical Systems. Tambov State Technical University Publ., 2007. 108 p.

Информация об авторе

Антипина Наталья Валерьевна — кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математических методов и цифровых технологий, Байкальский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация, natant2012@mail.ru, SPIN-код: 6204-5649, Scopus Author ID: 6701699991.

Author

Natalya V. Antipina — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematical Methods and Digital Technologies, Baikal State University, Irkutsk, Russian Federation, natant2012@mail.ru, SPIN-Code: 6204-5649, Scopus Author ID: 6701699991.

Для цитирования

Антипина Н.В. Качественный анализ оптимизационной модели распределения капитала / Н.В. Антипина. — DOI 10.17150/2411-6262.2022.13(3).29. — EDN OYDCBV // Baikal Research Journal. — 2022. — Т. 13, № 3.

For Citation

Antipina N.V. Qualitative Analysis of the Optimization Model of Capital's Distribution. *Baikal Research Journal*, 2022, vol. 13, no. 3. (In Russian). EDN: OYDCBV. DOI: 10.17150/2411-6262.2022.13(3).29.