УДК 004.94

В. В. Ступин
Байкальский государственный университет экономики и права, г. Иркутск, Российская Федерация

ИМИТАЦИЯ ОДНОГО КЛАССА СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ РМП-МЕТОДОМ

АННОТАЦИЯ. Задача имитации случайных процессов с заданным одномерным законом распределения вероятностей и автокорреляционной функцией в общем случае не решена. В статье рассматривается подход к имитации одного класса таких процессов, у которых автокорреляционная функция скачкообразно изменяется при нулевом лаге. Такая ситуация характерна для сумм случайных процессов. Подход основан на применении рандомизированных марковских цепей. В качестве рандомизирующей составляющей использовались порядковые статистики. Марковские цепи ограничивались условиями конечности, однородности, равенства элементов вектора начальных состояний и двойной стохастичности матрицы вероятностей переходов. Определена зависимость расхождения Δ в нулевой точке автокорреляционной функции от дисперсий порядковых статистик и числа состояний марковской цепи. Рассмотрены частные случаи вычисления расхождения Δ. Предложен алгоритм определения числа состояний по заданным Δ и распределению, отличному от равномерного, случайной величины, порождающей порядковые статистики.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Закон распределения вероятностей; автокорреляционная функция; имитация случайных процессов; цепь Маркова; порядковые статистики; рандомизированный марковский процесс.

ИНФОРМАЦИЯ О СТАТЬЕ. Дата поступления 9 сентября 2015 г.; дата принятия к печати 23 сентября 2015 г.; дата онлайн-размещения 30 сентября 2015 г.

V. V. Stupin
Baikal State University of Economics and Law, Irkutsk, Russian Federation

SIMULATING A CLASS OF RANDOM PROCESSES VIA THE RMP METHOD

ABSTRACT. The task of simulating random processes with the specified one-dimensional law of probability distribution and the autocorrelation (AC) function has not been generally solved. The article considers an approach to imitating a class of such processes which abruptly change their AC function in the null lag. Such situation is characteristic for random process sums. The approach is based on utilizing the randomized Markov chains. As a component of randomization the order statistics is used. The Markov chains are limited by conditions of finiteness, homogeneity, equality of elements of the initial vector states and double stochastic matrix of transition probabilities. The dependence is identified for the diversity of Δ at the zero point of the AC on dispersions of the order statistics and the number of the Markov chain states. The article considers particular cases of calculating the diversity of Δ, offers an algorithm of finding the number of states according to set values of Δ and distribution, which is different from the proportional one, the random value generating the order statistics.

KEYWORDS. Law of probability distribution; autocorrelation function; simulation of random processes; Markov chain; order statistics; randomized Markov process.

ARTICLE INFO. Received September 9, 2015; accepted September 23, 2015; available online September 30, 2015.

При анализе оценок автокорреляционных функций (АКФ) реальных временных рядов нередко приходится наблюдать скачкообразные изменения их значений для нулевых лагов. Такое поведение АКФ характерно для случайных процессов

$$\xi(t) = \eta(t) + \zeta(t), \tag{1}$$

у которых при $t = 0, 1, \ldots$; $\zeta(t)$ — последовательность некоррелированных случайных величин; $\eta(t)$ — некоррелированная с $\zeta(t)$ стационарная случайная последовательность [12, с. 3]. Действительно, если принять математическое ожидание $\zeta(t)$, равным нулю $M[\zeta(t)] = 0$, что не нарушает общности рассуждений, и

$$\delta(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau = 0, \\ 0, & \tau \neq 0, \end{cases}$$

то АКФ процесса $\xi(\cdot)$ описывается выражением

$$r_\xi(\tau) = \frac{\sigma_\zeta^2}{\sigma_\xi^2}\delta(\tau) + \frac{\sigma_\eta^2}{\sigma_\xi^2} r_\eta(\tau), \quad (2)$$

где σ_ζ, σ_η, σ_ξ — среднеквадратические отклонения последовательностей $\zeta(\cdot)$, $\eta(\cdot)$, $\xi(\cdot)$ соответственно.

Представление реального временного ряда моделью (1) основывается на знании его морфологических особенностей, но, как правило, этих знаний недостаточно для задания таких параметров модели, как одномерный закон распределения вероятностей (ОЗРВ) последовательностей $\zeta(\cdot)$, $\eta(\cdot)$ и АКФ последовательности $\eta(\cdot)$. В связи с чем задача воспроизведения слагаемых в выражении (1) при имитации временного ряда посредством процесса $\xi(\cdot)$ может оказаться неразрешимой. Проблема может быть устранена, если воспроизводить по указанным параметрам (ОЗРВ и АКФ) сразу всю сумму $\xi(\cdot)$, не разделяя ее на составляющие. Такую возможность обеспечивает метод, предложенный в работе [3].

Метод основан на использовании преобразования марковского процесса $\{\varphi(t),\ t \in T\}$, $T = [0, \infty)$, которое можно интерпретировать как рандомизацию $\{\varphi(t)\}$, поэтому далее будем называть его РМП-методом (методом рандомизации марковских процессов). Случай рандомизации однородной стационарной марковской цепи рассматривался в работах [2–4; 6–10].

Имея в виду задачу придания ОЗРВ и АКФ моделируемого процесса $\xi(t)$ требуемых свойств, процедуру рандомизации можно описать следующим выражением:

$$\xi(t) = X_{\varphi(t)}(t), \quad (3)$$

где $X_j(t)$ для каждого фиксированного $j = 1, ..., n$ — последовательности независимых и одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F_j(x) = P\{X_j(t) < x\}$. Если принять в качестве $X_j(t)$ для каждого фиксированного t j-ю порядковую статистику X_j случайной величины X с $F_X(x) = P\{X < x\}$, а в качестве $\varphi(t)$, $t = 0, 1, ...,$ конечную однородную цепь Маркова с множеством состояний $(1, ..., n)$, вектором $\pi(0) = (1/n, ..., 1/n)$ распределения вероятностей на состояниях в начальный момент времени $t = 0$ и дважды стохастической матрицей вероятностей перехода

$$\mathbb{P} = (P\{\varphi(t+1) = j | \varphi(t) = m\}) = (p_{mj}),$$

у которой для некоторого $t > 0$ и всех $m, j = 1, ..., n$,

$$p_{mj}(t) = P\{\varphi(t) = j | \varphi(0) = m\} > 0,$$

то ОЗРВ $\xi(\cdot)$ будет совпадать с законом распределения случайной величины X, а АКФ определяться выражением

$$r_\xi(\tau) = \frac{1}{n\sigma^2} \sum_{m,\,j=1}^{n} M_m M_j \left(p_{mj}(\tau) - \frac{1}{n} \right), \quad (4)$$

где M_j — математическое ожидание X_j, $j = 1, ..., n$; σ — среднеквадратическое отклонение X, $|\tau| = 1, 2, ...$

Если рассматривать функцию (4) процесса (3) для нулевого значения аргумента, то оказывается, что она отличается от единицы на величину

$$\Delta = 1 - \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} M_j^2 - M^2[X] \right) = \frac{1}{n\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2, \quad (5)$$

для которой справедливо неравенство

$$0 < \Delta \le \max_j(\sigma_j^2)/\sigma^2 \le 1,$$

где σ_j — среднеквадратическое отклонение X_j.

Таким образом, $r_\xi(\tau)$ в точке нуль имеет «скачок», величина Δ которого зависит от размерности матрицы переходов и совокупности $\{F_j(x)\}$ распределений вероятностей случайных величин $\{X_j\}$, $j = 1, \ldots, n$. Причем независимо от закона распределения случайной величины X с неограниченным ростом n величина «скачка» стремится к своей нижней границе — нулю, поскольку $\lim_{n\to\infty}\sigma_j^2 \to 0$ и равна единице при $n = 1$.

Учитывая выражение (5), перепишем функцию (4) для $|\tau| = 0, 1, \ldots$, тогда

$$r_\xi(\tau) = \Delta\delta(\tau) + \frac{1}{n\sigma^2}\sum_{m,j=1}^{n} M_m M_j\left(p_{mj}(\tau) - \frac{1}{n}\right).$$

Если сравнить последнее равенство с выражением (2), то становится ясно, что $\Delta\sigma_\xi^2$ имеет смысл дисперсии шума $\zeta(t)$ и, следовательно, характеризует его долю в процессе (1).

Форма АКФ (4) зависит от вида матрицы $\mathbb{P}$ [2, с. 58], величина же Δ полностью определяется совокупностью распределений $\{F_j\}$ случайных величин $\{X_j\}$. Выбор в качестве $\{X_j\}$ j-х порядковых статистик зафиксировал класс распределений совокупности $\{F_j\}$, ограничив возможность варьирования ее элементами при заданном распределении порождающей случайной величины X параметрическим уровнем. Влиять же на параметры $\{F_j\}$ можно единственным способом — изменяя значение n.

Следовательно, одной из задач моделирования случайных процессов типа (1) является задача получения рандомизированной марковской цепи с требуемым значением Δ ее АКФ, которая сводится к установлению зависимости n от Δ путем преобразования уравнения (5).

Для вычисления среднего значения квадратов математических ожиданий порядковых статистик воспользуемся известной формулой [5, с. 60]:

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} M_j^2 = \sum_{m=0}^{n-1}\frac{n!(n-1)!(2m+1)}{(n+m)!(n-m-1)!}\left[\int_{-\infty}^{\infty} L_m(2F_X(x)-1)x\,dF_X(x)\right]^2,$$

где $L_m(\cdot)$ — многочлен Лежандра m-й степени.

Учитывая, что

$$L_m(y) = \sum_{k=0}^{m} C_{m+k}^k C_m^k\left(\frac{y-1}{2}\right)^k, \quad m = 0, 1, \ldots,$$

перепишем последнее равенство:

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} M_j^2 = M^2[X] + \sum_{m=1}^{n-1}(2m+1)\frac{C_{n-1}^m}{C_{n+m}^n}\left[\sum_{k=0}^{m} C_{m+k}^k C_m^k \int_{-\infty}^{\infty}(F_X(x)-1)^k x\,dF_X(x)\right]^2.$$

Тогда

$$\Delta = 1 - \frac{1}{\sigma^2}\sum_{m=1}^{n-1}(2m+1)\frac{C_{n-1}^m}{C_{n+m}^n}\left[\sum_{k=0}^{m} C_{m+k}^k C_m^k \int_{-\infty}^{\infty}(F_X(x)-1)^k x\,dF_X(x)\right]^2, \qquad (6)$$

или с помощью вероятностного интегрального преобразования $y = F_X(x)$

$$\Delta = 1 - \frac{1}{\sigma^2}\sum_{m=1}^{n-1}(2m+1)\frac{C_{n-1}^m}{C_{n+m}^n}\left[\sum_{k=0}^{m} C_{m+k}^k C_m^k \int_0^1 (y-1)^k F_X^{-1}(y)\,dy\right]^2, \qquad (7)$$

где $F_X^{-1}(y)$ — функция, обратная $F_X(x)$.

Рассмотрим процедуру решения задачи моделирования процесса (1) для частных случаев. Пусть требуемая АКФ описывается модифицированной экспонентой, т. е. в выражении (2):

$$r_\eta(\tau) = (\beta e^{-\gamma})^{|\tau|},$$

при $|\tau| = 0, 1, ...; \beta = \pm 1$ и $\sigma_\zeta^2 / \sigma^2 = \Delta$.

Данную форму АКФ можно получить, используя в качестве матрицы вероятностей переходов циркулянт с первой строкой, в которой все элементы, кроме первого $a_0 = a$, одинаковы [6, с. 63]. Тогда независимо от $F_X(x)$

$$a = \frac{1}{n} + \beta\left(1 - \frac{1}{n}\right)e^{-\gamma}. \tag{8}$$

Для равномерно распределенной на интервале (0, 1) случайной величины X после соответствующих вычислений из выражения (6) получаем

$$\Delta = \frac{2}{n+1}.$$

Последнее выражение позволяет определить n по заданному Δ

$$n = int(2/\Delta - 0{,}5), \tag{9}$$

где $int(\cdot)$ — оператор взятия целой части числа, заключенного в скобки [11, с. 7].

Итак, для моделирования случайного процесса (1) с равномерным на (0, 1) ОЗРВ и АКФ, задаваемой модифицированной экспонентой с параметрами Δ, β и γ, достаточно установить размерность циркулянта по формуле (9), затем вычислить значения элементов строки циркулянта, используя выражение (8).

Очевидно, что в общем случае нельзя явно выразить n через величину Δ из формул (6) или (7), поскольку взять интеграл в этих равенствах удается лишь для ограниченного набора распределений $F_X(x)$. И даже в тех благоприятных ситуациях, когда вид $F_X(x)$ позволяет выполнить интегрирование, может оказаться, что в явной форме n выписать невозможно.

Так при экспоненциальном распределении случайной величины X

$$F_X(x) = 1 - e^{-x},\ x \in [0, \infty)$$

полученное из формулы (6) выражение Δ через n имеет вид

$$\Delta = \Delta_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} \tag{10}$$

и не позволяет осуществить обратное преобразование. Определить n здесь можно путем последовательного перебора. Для упрощения вычислительных процедур воспользуемся рекуррентными выражениями Δ:

$$\begin{aligned} \Delta_{k+1} &= \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{k}{k+1}\Delta_k; \\ \Delta_{k-1} &= -\frac{1}{k(k-1)} + \frac{k}{k-1}\Delta_k, \end{aligned} \tag{11}$$

где Δ_k находится по формуле (10). Начальное значение k определяется из выражения (9).

Для тех случаев, когда интегралы в формулах (6) и (7) не берутся, но удается вычислить обратную функцию $F_X^{-1}(y)$ для случайной величины X, то Δ можно найти, используя приближенный способ определения математических ожиданий порядковых статистик [1, с. 452]

$$M_j \cong F_X^{-1}\left(\frac{j}{n+1}\right). \tag{12}$$

Более точное выражение получается, если разложить функцию $F_X^{-1}(y_j)$ (y_j — значение j-й порядковой статистики, образованной равномерно распределенной на (0, 1) случайной величиной) в ряд Тейлора в окрестности точки $j/(n+1)$, при условии, что соответствующие производные $f^{(i)}(\cdot)$, $i = 1, 2, \ldots$, плотности распределения случайной величины X существуют. Так ограничившись тремя членами ряда, получим

$$M_j = F^{-1}\left(\frac{j}{n+1}\right) - \frac{j(n-j+1)f^{(1)}\left(\frac{j}{n+1}\right)}{2(n+1)^2(n+2)\left(f\left(\frac{j}{n+1}\right)\right)^2} + \\ + \frac{j(n-2j+1)(n-j+1)}{3(n+1)^3(n+2)(n+3)\left(f^{(1)}\left(\frac{j}{n+1}\right)\right)^3} \times \left(2\left(f^{(1)}\left(\frac{j}{n+1}\right)\right)^2 - f^{(2)}\left(\frac{j}{n+1}\right)\right) + O\left(\frac{j}{n^4}\right). \quad (13)$$

Наконец возможны случаи, к сожалению не столь уж редкие, когда аналитически нельзя вычислить ни интегралы в выражениях (6) и (7), ни функцию $F_X^{-1}(y)$. В таких ситуациях найти оценки математических ожиданий M_j порядковых статистик позволяет использование методов статистического моделирования.

Обобщая вышесказанное, опишем алгоритм решения задачи определения n по заданным Δ и распределению $F_X(x)$, отличному от равномерного:

1. Определяется начальное приближение k для n из формулы (9).

2. Находится первое приближение Δ_k для Δ в зависимости от вида распределения $F_X(x)$ по формулам (10)–(13) и методом статистического моделирования, для чего

– генерируются последовательности реализаций j-х ($j = 1, \ldots, k$) порядковых статистик, порожденных случайной величиной с распределением $F_X(x)$;

– для каждой j-й последовательности реализаций оценивается математическое ожидание M_j;

– оценки подставляются в выражение (5) с заменой n на k.

3. Полученное значение Δ_k сравнивается с Δ:

– если $\Delta_k > \Delta$, то $k = k + 1$;

– если $\Delta_k < \Delta$, то $k = k - 1$.

4. Последовательность операций повторяется, начиная со второго пункта, до тех пор, пока для очередного k не будет выполняться условие

$$\begin{aligned} |\Delta_k - \Delta| &< |\Delta_{k+1} - \Delta|, \\ |\Delta_k - \Delta| &< |\Delta_{k-1} - \Delta|. \end{aligned} \quad (14)$$

После чего за n принимается значение k, удовлетворяющее условию (14).

Список использованной литературы

1. Айвазян С. А. Основы моделирования и первичная обработка данных / С. А. Айвазян, И. С. Енюков, Л. Д. Мешалкин. — М. : Финансы и статистика, 1983. — 471 с.

2. Братищенко В. В. Вероятностное преобразование марковской цепи специального вида / В. В. Братищенко // Методы и средства статистического моделирования : межвуз. сб. — Казань : Казан. авиац. ин-т, 1987. — С. 54–58.

3. Братищенко В. В. Марковский процесс вероятностных мер / В. В. Братищенко, С. И. Молчан ; Иркут. ин-т нар. хоз-ва. — Иркутск, 1984. — 7 с. — Деп. в ВИНИТИ 17.05.84, № 3329.

4. Братищенко В. В. Применение марковских цепей для моделирования случайных процессов с заданными одномерным законом распределения вероятностей и автокорреляционной функцией / В. В. Братищенко // Вычислительная математика и моделирование в физике : сб. науч. тр. / под ред. Г. А. Михайлова. — Новосибирск : ВЦ СО АН СССР, 1989. — С. 2–10.

5. Дэйвид Г. Порядковые статистики : пер. с англ. / Г. Дэвид. — М. : Наука, 1979. — 336 с.

6. Моделирование случайных процессов посредством некоторого вероятностного преобразования / Г. П. Хамитов, В. В. Братищенко, С. И. Молчан, В. В. Ступин // Методы и средства статистического моделирования : межвуз. сб. — Казань : Казан. авиац. ин-т, 1987. — С. 59–65.

7. Молчан С. И. Методы и средства имитации случайных прцессов : дис. ... канд. техн. наук : 05.13.18 / С. И. Молчан. — Иркутск, 1988. — 262 с.

8. Молчан С. И. Об одном подходе к моделированию случайных процессов с заданными характеристиками / С. И. Молчан // Моделирование вычислительных систем и процессов / под ред. А. И. Микова [и др.]. — Пермь, Изд-во Перм. гос. ун-та, 1986. — С. 59–66.

9. Молчан С. И. Процесс марковского упорядочения / С. И. Молчан, А. В. Петров, В. В. Ступин // Вероятностные автоматы и их приложения : сб. докл. 3 Всесоюз. симпозиума / сост. В. М. Захаров. — Казань, 1986. — С. 184–188.

10. Один класс стационарных временных рядов с произвольным одномерным распределением вероятностей / А. С. Марченко, С. И. Молчан, А. В. Петров, В. В. Ступин // Теория и приложения статистического моделирования : сб. науч. тр. — Новосибирск : ВЦ СО АН СССР, 1985. — С. 56–65.

11. Ступин В. В. Моделирование одного класса случайных процессов / В. В. Ступин ; Иркут. ин-т нар. хоз-ва. — Иркутск, 1984. — 7 с. — Деп. в ВИНИТИ 7.06.84, № 4253.

12. Яглом А. М. Введение в теорию стационарных случайных функций / А. М. Яглом // Успехи математических наук. — 1952. — Т. 7, № 5 (51). — С. 3–168.

References

1. Aivazyan S. A., Enyukov I. S., Meshalkin L. D. *Osnovy modelirovaniya i pervichnaya obrabotka dannykh* [Basics of Modelling and Primary Data Processing]. Moscow, Finansy i statistika Publ., 1983. 471 p.

2. Bratishchenko V. V. Probabilistic transformation of the Markov chain of a specific kind. *Metody i sredstva statisticheskogo modelirovaniya* [Methods and tools of statistic modelling]. Kazan' Aviation Institute Publ., 1987, pp. 54–58. (In Russian).

3. Bratishhenko V. V., Molchan S. I. Markovsky process verojatnostnyh mer [Markov process of probabilistic measures]. Irkutsk, 1984. 7 p.

4. Bratishhenko V. V. Application of Markov chains for modelling random processes with given one-dimension law of probability distribution and autocorrelation function. In Mihajlov G. A. (ed.). *Vychislitel'naja matematika i modelirovanie v fizike* [Computing mathematics and modelling on physics]. Novosibirsk, Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics Siberian Branch of USSR Academy of Sciences Publ., 1989, pp. 2–10. (In Russian).

5. David H. A. Order Statistics. 2nd ed. New York, John Wiley & Sons, Inc., 1981, 360 p. (Russ. ed.: David H. *Poryadkovye statistiki*. Moscow, Nauka Publ., 1979. 336 p.).

6. Hamitov G. P., Bratishhenko V. V., Molchan S. I., Stupin V. V. Modelling random processes via a certain probabilistic transformation. *Metody i sredstva statisticheskogo modelirovaniya* [Methods and tools of statistic modelling]. Kazan Aviation Institute Publ., 1987, pp. 59–65. (In Russian).

7. Molchan S. I. *Metody i sredstva imitacii sluchajnyh prcessov. Kand. Diss.* [Methods and tools of statistic simulation of random processes. Cand. Diss.]. Irkutsk, 1988. 262 p.

8. Molchan S. I. *On an approach to modelling random processes with set characteristics*. In Mikov A. I. (ed.). *Modelirovanie vychislitel'nyh sistem i processov* [Modelling computing systems and processes]. Perm State University Publ., 1986, pp. 59–66. (In Russian).

9. Molchan S. I., Petrov A. V., Stupin V. V. *Process of Markov seriation*. In Zaharov V. M. (ed.). *Verojatnostnye avtomaty i ih prilozhenija. Sbornik dokladov 3-go Vsesojuznogo simpoziuma* [Probabilistic automations and their applications. Book of Reports of 3-rd All-Union Symposium.]. Kazan, 1986, pp. 184–188. (In Russian).

10. Marchenko A. S., Molchan S. I., Petrov A. V., Stupin V. V. One class of stationary temporal series with general one-dimension probability distribution. *Teorija i prilozhenija statisticheskogo modelirovanija* [Theory and applications of statistic modelling]. Novosibirsk, Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics Siberian Branch of USSR Academy of Sciences Publ., 1985, pp. 56–65. (In Russian).

11. Stupin V. V. *Modelirovanie odnogo klassa sluchajnyh processov* [Modelling one class of random processes]. Irkutsk, 1984. 7 p.

12. Jaglom A. M. Introduction to theory of stationary random functions. *Uspehi matematicheskih nauk = Russian Mathematical Surveys*, 1952, vol. 7, no. 5 (51), pp. 3–168. (In Russian).

Информация об авторе

Ступин Виталий Валерьевич — кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра информатики и кибернетики, Байкальский государственный университет экономики и права, 664003, г. Иркутск, ул. Ленина, 11, e-mail: svv@isea.ru.

Author

Vitaly V. Stupin — PhD in Physicsl and Mathematics, Associate Professor, Chair of Computer Science and Cybernetics, Baikal State University of Economics and Law, 11 Lenin St., 664003, Irkutsk, Russian Federation; e-mail: svv@isea.ru.

Библиографическое описание статьи

Ступин В. В. Имитация одного класса случайных процессов РМП-методом / В. В. Ступин // Baikal Research Journal. — 2015. — Т. 6, № 5. — DOI : 10.17150/2411-6262.2015.6(5).16.

Reference to article

Stupin V. V. Simulating a class of random processes via the RMP method. *Baikal Research Journal*, 2015, vol. 6, no. 5. DOI: 10.17150/2411-6262.2015.6(5).16. (In Russian).