

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРОГОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ДИФРАКЦИИ НА ПРЯМОУГОЛЬНОМ КЛИНЕ

Рассмотрена задача строгой дифракции на прямоугольном идеальном-проводящем клине (ступеньке). Получено строгое решение уравнения Гельмгольца для указанной задачи в случае, когда падающая волна имеет одно отражение (от горизонтальной поверхности клина). Вычислена интенсивность дифрагирующей электромагнитной волны, обладающей TE поляризацией. Показано, что появление в задаче вертикальной стенки усиливает дифракцию исходной волны при углах падения, близких к прямому, и отжимает первый дифракционный максимум от линии, разделяющей свет и тень. Уменьшение угла Зоммерфельда для падающей волны приближает решение для ступеньки к решению Зоммерфельда для полуплоскости. При этом, влияние вертикальной стенки на эффект дифракции снижается.

Ключевые слова: дифракция на прямоугольном клине; численное моделирование математической дифракции.

A.V. Borovsky
A.L. Galkin

NUMERICAL SIMULATION OF RIGOROUS MATHEMATICAL DIFFRACTION ON RECTANGULAR WEDGE

The article deals with the problem of rigorous diffraction on a perfectly conducting rectangular wedge (step). The authors propose the exact solution to the Helmholtz equation for this problem in case when the incident wave has one reflection (on horizontal surface of the wedge), and calculate the intensity of the diffracting electromagnetic wave with TE -polarization. It is shown that a vertical wall increases the diffraction of the original wave in the angle of incidence close to the vertical and demonstrates the first diffraction peak of the line that separates light and shadow. Reducing the Sommerfeld angle of the incident wave is makes the solution for the step similar to the Sommerfeld's solution for the half-plane; in this case the impact of the vertical wall on the effect of diffraction decreases.

Keywords: diffraction on rectangular wedge; numerical simulation of mathematical diffraction.

Математическая модель дифракции (рассеяния световой волны на физическом объекте) была сформулирована более 100 лет назад Г. Кирхгофом и А. Зоммерфельдом [13; 14]. Она сводилась к решению краевой задачи для уравнения Гельмгольца в области, ограниченной одной или несколькими поверхностями, и с условиями Зоммерфельда на бесконечности для рассеянной волны. В связи с математической сложностью данной задачи Кирхгоф предложил сделать ряд упрощений. Впоследствии эти предельные случаи стали называться дифракцией Фраунгофера (описывает дальнюю зону светорассеяния) и дифракцией Френеля (описывает ближнюю зону светорассеяния). Решение задачи дифракции в рамках строгой модели впервые удалось получить А. Зоммерфельду [9]. Им был

предложен метод контурных интегралов в комплексной плоскости для решения двухмерной краевой задачи дифракции. Впоследствии большой вклад в исследование этого метода внесли Ф. Франк и Р. Мизес [12]. Мы будем называть данный метод — методом Зоммерфельда-Франка-Мизеса (ЗФМ). В дальнейшем задачами строгой дифракции занимались М. Борн и Э. Вольф, Г. Гринберг и другие авторы [1; 8]. Постановка задачи строгой дифракции имеется в курсе теоретической физики Л. Ландау и Е. Лифшица, однако, ее решение не приводится, что говорит о незавершенности исследований [10].

В данной работе рассмотрим строгую математическую дифракцию на прямоугольном металлическом клине. Как ни странно, решение этой задачи отсутствует в трудах классиков теоретической физики, упомянутых выше. Хотя, именно эта задача представляет повышенный практический интерес, поскольку моделирует взаимодействие световых пучков с краями оправ и диафрагм в оптических устройствах. На важность этой проблемы указано в [6]. Моделирование строгой дифракции на прямоугольном клине (иногда такой клин называют ступенькой) представляет так же познавательный интерес, так как исследуется строгое решение уравнений Максвелла, описывающих взаимодействие электромагнитного поля с реальным физическим объектом.

В данной работе авторы опираются на выполненные ранее исследования дифракционного интеграла ЗФМ [2; 3] и численное моделирование строгой математической дифракции на полуплоскости для электромагнитных волн, обладающих ТЕ- и ТН-поляризациями [4; 5].

Постановка задачи. Рассмотрим клин с углом при вершине δ (для прямоугольного клина $\delta = \pi/2$), рис. 1, на который падает внешняя плоская электромагнитная волна, характеризуемая волновым вектором \vec{k} . В полярной системе координат вектор \vec{k} задается модулем $k = |\vec{k}| = 2\pi/\lambda$, где λ — длина волны, и полярным углом α . Точка наблюдения задается модулем радиус-вектора $r = |\vec{r}|$ и полярным углом φ .

Выражение для падающей плоской волны в полярных координатах дается следующей формулой [1; 9; 12]

$$U_g^+(\rho, \theta) = \exp(ip \cos \theta), \quad \rho = kr, \quad \theta = \varphi - \alpha. \quad (1)$$

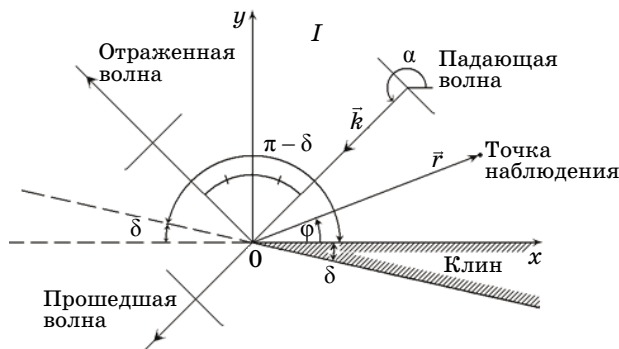


Рис. 1. Дифракция плоской волны на проводящем клине в области I

Краевая задача дифракции ставится следующим образом: требуется найти решение двухмерного уравнения Гельмгольца

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + U = 0 \quad (2)$$

в области углов $0 < \varphi < 2\pi - \delta$ при любых значениях радиуса $0 < \rho < \infty$. На поверхностях клина ставится условие равенства нулю решения

$$U|_{\varphi=0} = 0, \quad U|_{\varphi=2\pi-\delta} = 0. \quad (3)$$

В силу линейности уравнения Гельмгольца решение краевой задачи можно разложить на сумму решений геометрической оптики и дифракционной составляющей

$$U = U_g + U_d. \quad (4)$$

На дифракционную часть решения U_d ставится условие Зоммерфельда — эта часть решения должна стремиться к исчезающей на бесконечности цилиндрической волне

$$U_d \rightarrow 0 \left(\frac{1}{\sqrt{r}} \exp(ikr) \right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Рассмотрим решение задачи дифракции, когда имеется одно отражение падающей волны (от верхней грани клина, что накладывает ограничение на угол падения). В этом случае отраженная волна может быть представлена выражением:

$$U_g^-(\rho, \theta) = \exp(i(\pi + \rho \cos \theta)), \quad \rho = kr, \quad \theta = \varphi - (2\pi - \alpha),$$

что дает

$$U_g^-(\rho, \theta) = -\exp(i\rho \cos(\varphi + \alpha)).$$

Таким образом, сумма падающей и отраженной волн геометрической оптики записывается в виде:

$$U_g = U_g^+(\rho, \varphi - \alpha) + U_g^-(\rho, \varphi + \alpha) = \exp(i\rho \cos(\varphi - \alpha)) - \exp(i\rho \cos(\varphi + \alpha)).$$

В силу четности косинуса, решение геометрической оптики обращается в нуль на верхней грани клина

$$U_g|_{\varphi=0} = U_g^+(\rho, -\alpha) + U_g^-(\rho, +\alpha) = \exp(i\rho \cos(-\alpha)) - \exp(i\rho \cos(+\alpha)).$$

Дифракционную составляющую U_d целесообразно искать в виде разности двух функций, описывающих искажение падающей и отраженной волн геометрической оптики

$$U_d(\varphi, \alpha) = V(\varphi - \alpha) - V(\varphi + \alpha).$$

Построим решение краевой задачи, используя функции $V(\theta)$ с периодом $T = 2(2\pi - \delta)$. Такие периодические функции должны быть четными. Если решение будет найдено, то, согласно теореме единственности для уравнения Гельмгольца [7; 11], оно будет единственным решением краевой задачи.

На верхней грани клина решение обращается в нуль

$$U_d(0, \alpha) = V(-\alpha) - V(+\alpha) = 0,$$

в силу четности функции $V(\theta)$. На нижней грани клина

$$U_d(2\pi - \delta, \alpha) = V((2\pi - \delta) - \alpha) - V((2\pi - \delta) + \alpha) = 0,$$

в силу зеркальной симметрии функции V относительно половинки периода. Перечисленными свойствами обладает дифракционный контурный интеграл ЗФМ $U_p^D(\theta)$ с периодом $2\pi p$, где $p = T / 2\pi$. (Теорию контурного интеграла ЗФМ см. в [2; 3]).

Общие вопросы. Аналитическое выражение для дифракционного контурного интеграла ЗФМ, обладающего периодом $2\pi p$ и представляющего сумму решения геометрической оптики и дифракционной добавки, рассмотрено в [3]. Это выражение имеет вид:

$$U_n^C(\rho, \theta) = \exp(i\rho \cos \theta) \times \\ \times \frac{1}{n} \left[1 + \sum_{m=1}^{n-1} \cos \left(\theta \left(1 - \frac{m}{n} \right) \right) \exp \left(-i \frac{\pi m}{2n} \right) \sin \left(\frac{\pi m}{n} \right) \int_0^\rho e^{-i\xi \cos \theta} H_{m/n}^{(2)}(\xi) d\xi \right]; \\ U_n^C(0) = \frac{1}{n}; \quad (6)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} U_n^C(\rho, \theta) = \begin{cases} \exp(i\rho \cos \theta), & |\theta| < \pi \\ 0, & |\theta| > \pi \end{cases}.$$

Здесь $H_{m/n}^{(2)}$ — вторая функция Ханкеля с дробным индексом. В теории цилиндрических функций определены первая и вторая функции Ханкеля. Они отличаются комплексным сопряжением. Действительная часть второй функции Ханкеля равна функции Бесселя, а мнимая часть равна функции Неймана с отрицательным знаком. Выражение в квадратных скобках удовлетворяет «центральному тождеству теории дифракции для клина» (ЦТД), доказательство которого приведено, например, в [3].

$$1 + \sum_{m=1}^{n-1} \cos \left(\theta \left(1 - \frac{m}{n} \right) \right) \exp \left(-i \frac{\pi m}{2n} \right) \sin \left(\frac{\pi m}{n} \right) \int_0^\infty \exp(-i\xi \cos \theta) H_{m/n}^{(2)}(\xi) d\xi \equiv \\ \equiv \begin{cases} n, & |\theta| < \pi \\ 0, & |\theta| > \pi \end{cases}. \quad (7)$$

При рассмотрении задачи дифракции на прямоугольном клине исходным является дифракционный интеграл с периодом 6π . Для него целочисленный индекс n принимает значение $n = 3$. При этом, целые числа m равны $m = 1, 2$. Выражение для дифракционного интеграла ЗФМ в этом случае принимает следующий вид:

$$U_3^C(\rho, \theta) = \exp(i\rho \cos \theta) \times \\ \times \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) \cos \left(\frac{2}{3} \theta \right) \int_0^\rho \exp(-i\xi \cos \theta) H_{1/3}^{(2)}(\xi) d\xi + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cos \left(\frac{1}{3} \theta \right) \int_0^\rho \exp(-i\xi \cos \theta) H_{2/3}^{(2)}(\xi) d\xi \right]. \quad (8)$$

Решение уравнения Гельмгольца для случая клина с прямым углом строится с применением теоремы о понижении периода. Период интеграла (8) понижается с 6π до 3π . Окончательное строгое решение для задачи дифракции на прямоугольном клине имеет вид:

$$U(\rho, \varphi, \gamma) = [U_3^C(\rho, \varphi - \gamma) - U_3^C(\rho, \varphi + \gamma)]_1 + \\ + [U_3^C(\rho, 3\pi + (\varphi - \gamma)) - U_3^C(\rho, 3\pi + (\varphi + \gamma))]_2. \quad (9)$$

Здесь $(\gamma = \alpha - \pi)$ — угол Зоммерфельда. Функция (9) обращается в нуль на горизонтальной и вертикальной гранях ступеньки, т.е. при значениях угла наблюдения $\varphi = 0, 3\pi/2$.

Решение уравнения Гельмгольца $U(\rho, \varphi, \gamma)$ следующим образом связано со значением электрического поля для электромагнитной волны ТЕ-поляризации (подробнее см. [1])

$$E(r, t) = \operatorname{Re} U(r) \cos(\omega t) + \operatorname{Im} U(r) \sin(\omega t), \quad (10)$$

усреднив по быстрым осцилляциям вектор Пойнтинга, получим следующее выражение для интенсивности электромагнитной волны [3; 4; 5]

$$I = \sqrt{\frac{1}{\rho^2} \left[\operatorname{Re} U \frac{\partial \operatorname{Im} U}{\partial \varphi} - \operatorname{Im} U \frac{\partial \operatorname{Re} U}{\partial \varphi} \right]^2 + \left[\operatorname{Re} U \frac{\partial \operatorname{Im} U}{\partial \rho} - \operatorname{Im} U \frac{\partial \operatorname{Re} U}{\partial \rho} \right]^2}. \quad (11)$$

В задаче дифракции интенсивность является единственной наблюдаемой величиной. Существенной особенностью выражения (11) является то, что оно не зависит от знака мнимой части функции U , поскольку мнимая часть входит в (11) в виде квадратов линейных комбинаций. В этом смысле безразлично, какое решение искать для уравнения Гельмгольца — прямое или комплексно-сопряженное. Поскольку решение записывается в виде суммы и разности дифракционных интегралов, то последний, также можно записывать либо в прямом, либо в комплексно-сопряженном виде. Интенсивность от этого не зависит.

Ниже представим результаты численного моделирования задачи строгой дифракции для электромагнитной волны TE поляризации на прямоугольном клине. Математическая модель для нее описывается выражениями (8)–(11).

Методика вычислений. Формулы модели представляют значительную сложность для вычислений. Цилиндрическая функция Ханкеля содержит в мнимой части функцию Неймана, которая имеет особенность в нуле. Поэтому формулы модели содержат несобственные в нуле интегралы от осциллирующих функций, одна из которых является цилиндрической. Раскрытие интегрируемой особенности мнимой части функции Неймана представляло главную сложность проводимых вычислений. Кроме того, выражение для интенсивности содержит производные от решения задачи (9), вычисление которых представляет отдельную проблему численных методов.

Для проведения численных расчетов применялись пакеты объектно-программирования «Маткад» и «Математика». Первый пакет позволяет проводить вычисления несобственных интегралов непосредственно, при этом, время расчетов не является оптимальным. Для применения второго пакета были проделаны следующие оценки. В интервале $[0, 1]$ справедливы асимптотики с константами A_μ, B_μ

$$\operatorname{Im} H_\mu^{(2)}(\xi) \sim \xi^{-\mu} (A_\mu \xi^{2\mu} + B_\mu), \quad \mu = \frac{1}{3}; \frac{2}{3},$$

мнимая экспонента в (8) изменяется слабо, поэтому относительная погрешность в связи с обрезанием особенности интеграла на уровне ε равна

$$\delta_\mu = \frac{\int_0^\varepsilon \operatorname{Im} H_\mu^{(2)}(\xi) d\xi}{\int_0^1 \operatorname{Im} H_\mu^{(2)}(\xi) d\xi} = \frac{\varepsilon^{1-\mu} (1 + \varepsilon^{2\mu} A_\mu / B_\mu (1-\mu) / (1+\mu))}{1 + A_\mu / B_\mu (1-\mu) / (1+\mu)}.$$

При $\varepsilon = 10^{-6}$ $\delta_{1/3} = 1,3 \cdot 10^{-4}$; $\delta_{2/3} = 8,9 \cdot 10^{-3}$, т.е. погрешность вычисления интегралов становится меньше 1%, но наибольшая величина $\operatorname{Im} H_\mu^{(2)}(\varepsilon)$ достигает значения $\operatorname{Im} H_{2/3}^{(2)}(\varepsilon) = 6,84 \cdot 10^3$. Для построения интерполяционных функций в пакете «Математика» на интервале $[\varepsilon, 1]$ далее применяется линейная интерполяция на логарифмической сетке $\{m10^{-k}\}$, $m = 1, 2, \dots, 9$; $k = 0, 1, \dots, 7$. Увеличение порядка интерполяции из-за отмеченного сильного перепада функций Ханкеля при подходе к особенности приводит к появлению ложной пиковой структуры в численном решении. Для определения производных, входящих в выражение (11) для интенсивности, используется дифференцирование по φ

численного решения при фиксированном ρ , производные по ρ определяются как центральные разности по двум разнесенным слоям по ρ . Разработанная методика для расчетов с использованием пакета «Математика» позволила заметно сократить время расчетов.

Тестирование вычислений. Тестирование вычислительных программ проводилось следующим образом. Во-первых, была проверена идентичность функции Ханкеля в обоих пакетах. Во-вторых, была осуществлена проверка вычисления несобственного интеграла, которая показала, что первоначальные проблемы в пакете Математика, связанные с потерей точности при учете особенности для функции Неймана в нуле, преодолены. В-третьих, была протестирована на аналитическом примере эффективность счета интегралов от двух осциллирующих функций с затуханием. Данная проверка дала положительный результат. В-четвертых, было проверено асимптотическое выполнение в численных расчетах центрального тождества теории дифракции (7). Результаты такой проверки для функции $\Phi(\rho, \theta) = U_3^C(\rho, \theta) \exp(-i\rho \cos\theta)$ представлены на рис. 2 и 3. Вычисления асимптотически совпадают с аналитическими результатами. В-пятых, было проверено совпадение решения (9) при $\rho \rightarrow \infty$, $\varphi \rightarrow 0$ с решением задачи строгой дифракции на полуплоскости [2; 5]. Параллельно была выяснена роль скобок $[\square]_1$ и $[\square]_2$ в (9). Результаты этого исследования представлены на рис. 4 и 5. Выводы следующие: основной вклад в решение вносит первая скобка; при стремлении $\varphi \rightarrow 0$ вклад второй скобки несуществен; при стремлении $\varphi \rightarrow 3\pi / 2$ (вблизи вертикальной стенки) вклад второй скобки становится существенным; вторая скобка обеспечивает обращение в нуль решения уравнения Гельмгольца на вертикальной стенке. Исследования тестового характера подтвердили правильность математической модели и численных расчетов.

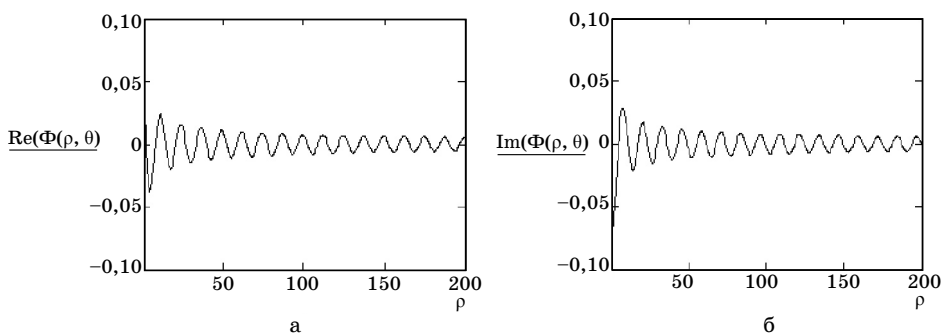


Рис. 2. Асимптотика функции $\Phi(\rho, \theta)$ при $\rho \rightarrow \infty$ для углов $|\theta| > \pi$, $\theta = 3\pi + \pi / 3$, (а) действительная часть, (б) мнимая часть функции $\Phi(\rho, \theta)$

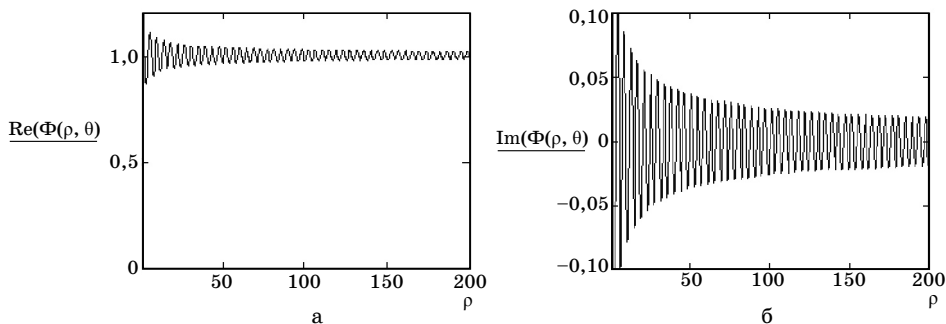


Рис. 3. Асимптотика функции $\Phi(\rho, \theta)$ при $\rho \rightarrow \infty$ для углов $|\theta| < \pi$, $\theta = \pi / 3$, (а) действительная часть, (б) мнимая часть функции $\Phi(\rho, \theta)$

Численное моделирование. Ниже представим результаты численного моделирования строгой дифракции на ступеньке (на прямоугольном клине) для случая, когда угол Зоммерфельда для падающей волны ненамного отличается от прямого угла: $\gamma = \pi / 2 - 0,05$. При этом, следует ожидать значительного влияния вертикальной стенки. Расчеты действительной и мнимой частей решения уравнения Гельмгольца для этого случая уже были представлены на рис. 4 (в) и 5 (в). Из них видны три характерные области углов, в которых динамика волн выглядит по-разному. В диапазоне углов $0 < \varphi < \gamma \sim \pi / 2$ имеет место интерференция падающей и отраженной от верхней грани ступеньки волн. Размах амплитуды интерференции превышает единицу. В область углов $\gamma < \varphi < \pi + \gamma$ попадает только падающая волна, отраженной волны здесь не возникает. Интерференции в данной области углов нет. Размах амплитуды волны равен единице. В диапазоне углов $\gamma + \pi < \varphi < 3\pi / 2$ имеет место геометрическая тень. Эффект дифракции размывает амплитуду поля в районе перехода к геометрической тени. Наличие вертикальной стенки отжимает электромагнитное поле, и максимум амплитуды смещается влево от положения строгой границы свет-тень. Поведение амплитуды отличается плавным переходом от максимального значения к нулю.

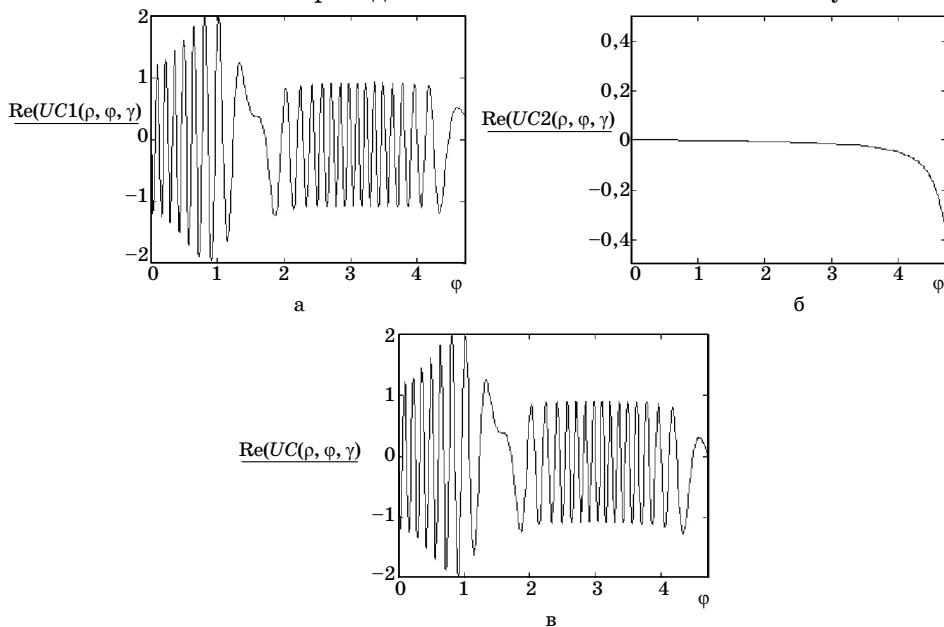


Рис. 4. Вклад скобок 1 и 2 и их сумма. Дифракция на ступеньке.

Действительная часть решения уравнения Гельмгольца для случая $\rho = 50$, $\gamma = -0,05 + \pi / 2$. (600 точек): (а) скобка — 1, (б) скобка — 2, (в) — сумма

На рис. 6 представлено угловое распределение интенсивности для рассматриваемого случая. Падающая и отраженная волны при углах Зоммерфельда близких к прямому гасят друг друга в результате интерференции. В области углов $\gamma < \varphi < 3\pi / 2$ прошедшая волна сильно возмущена эффектом дифракции. Дифракция усиливается при приближении к вертикальной стенке. Если в плоской невозмущенной волне интенсивность равна единице, то в результате дифракции интенсивность в основном максимуме возрастает в 1,7 раза. Наличие стенки довольно сильно отжимает главный пик дифракции влево. Дифракция на ступеньке развивается сильнее, чем на полуплоскости, на что указывает нижний рисунок. Интенсивность главного пика для ступеньки 1,7, а для полуплоскости 1,4.

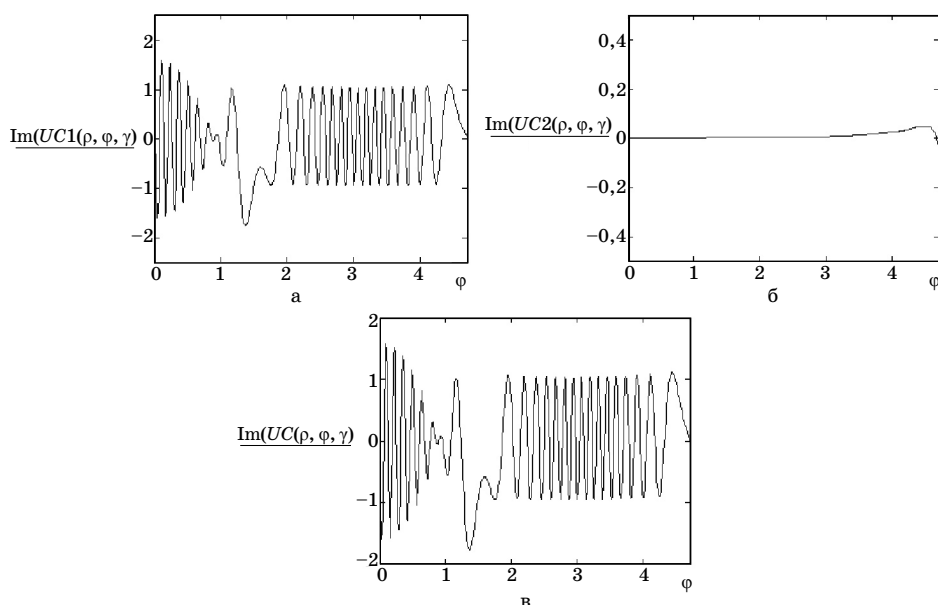


Рис. 5. Вклад скобок 1 и 2 и их сумма. Дифракция на ступеньке. Мнимая часть решения уравнения Гельмгольца для случая $\rho = 50$, $\gamma = -0,05 + \pi / 2$. (600 точек): (а) скобка — 1, (б) скобка — 2, (в) — сумма

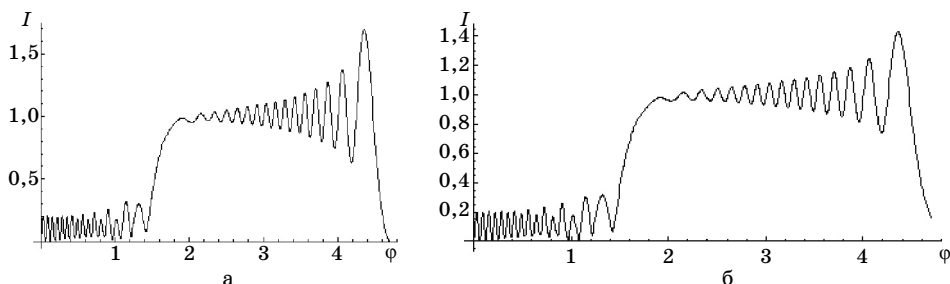


Рис. 6. Дифракция на ступеньке (а) и полуплоскости (б). Угловое распределение интенсивности для случая: $\rho = 50$, $\gamma = \pi / 2 - 0,05$

На рис. 7 показаны угловые распределения интенсивности для дифракции на ступеньке при изменении угла γ . Уменьшение угла Зоммерфельда приводит к снижению влияния вертикальной стенки. Интенсивность основного максимума дифракции снижается до 1,5. Решение становится ближе к решению задачи дифракции на полуплоскости.

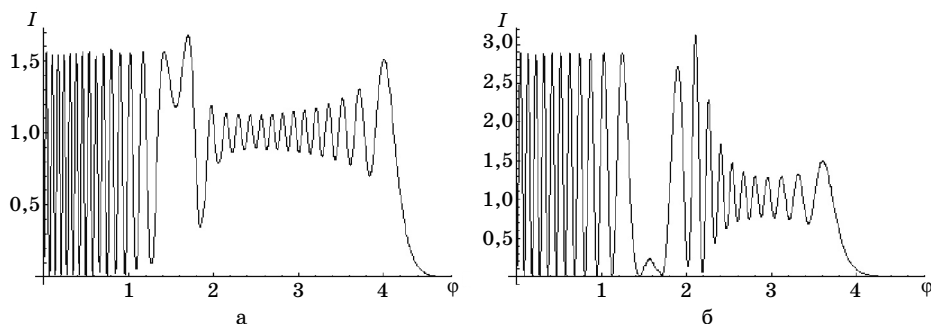


Рис. 7. Дифракция на ступеньке. Интенсивность для случая $\rho = 50$, $\gamma = \pi / 2 - 0,4$ (а), $\gamma = \pi / 2 - 0,8$ (б)

Выводы. Рассмотрена задача строгой дифракции на прямоугольном идеально-проводящем клине (ступеньке). Получено строгое решение уравнения Гельмгольца для указанной задачи для случая, когда падающая волна имеет одно отражение (от горизонтальной стенки). Рассмотрена интенсивность дифрагирующей электромагнитной волны, обладающей *TE* поляризацией. Показано, что появление в задаче вертикальной стенки усиливает дифракцию при падении исходной волны, близком к вертикальному, и отжимает первый дифракционный максимум от линии, разделяющей свет и тень. Уменьшение угла Зоммерфельда для падающей волны приближает решение для ступеньки к решению Зоммерфельда для полуплоскости. При этом, влияние вертикальной стенки на эффект дифракции снижается. Выяснена роль первой и второй скобок в решении уравнения Гельмгольца для ступеньки. Первая скобка вносит основной вклад в решение и практически совпадает с решением задачи дифракции на полуплоскости. Вторая скобка становится существенной только при приближении решения к вертикальной стенке и обнуляет решение на ней.

Список использованной литературы

1. Борн М. Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. — М.: Наука, 1973. — 720 с.
2. Боровский А.В. Дифракционный интеграл Франка-Зоммерфельда / А.В. Боровский, А.Н. Бородин. — Иркутск: Изд-во БГУЭП, 2012. — 64 с.
3. Боровский А.В. Математическая теория дифракции плоской волны на идеально-проводящем клине / А.В. Боровский, А.Н. Бородин, А.Л. Галкин. — Иркутск: Изд-во БГУЭП, 2013. — 104 с.
4. Боровский А.В. Численное моделирование дифракции ТН волны на идеально проводящей полуплоскости / А.В. Боровский, А.Н. Бородин, А.Л. Галкин // Известия Иркутской государственной экономической академии. — 2012. — № 5. — С. 124–129.
5. Боровский А.В. Численное моделирование эффектов дифракции / А.В. Боровский, А.Н. Бородин, А.Л. Галкин // Известия Иркутской государственной экономической академии (электронный журнал). — 2012. — № 4. — URL: <http://eizvestia.isea.ru/reader/article.aspx?id=13859>.
6. Бородин А.Н. Измерение светорассеяния в зависимости от радиуса кривизны края апертурной диафрагмы / А.Н. Бородин, А.Н. Малов, С.А. Чупраков // Компьютерная оптика. — 2005. — Вып. 28. — С. 87–88.
7. Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. — М.: Наука, 1982. — 512 с.
8. Гринберг Г. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений / Г. Гринберг. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948. — 727 с.
9. Зоммерфельд А. Оптика / А. Зоммерфельд. — М.: Иностран. лит-ра, 1953. — 486 с.
10. Ландау Л.Д. Теоретическая физика: в 10 т. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. — Т. 8: Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982. — 621 с.
11. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. — М.: Наука, 1972. — 735 с.
12. Франк Ф. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики / Ф. Франк, Р. Мизес. — М.; Л.: ОНТИ, 1937. — 998 с.
13. Kirchhoff G. // Ann.d.physik. — 1883. — № 18. — P. 663.
14. Sommerfeld A. Mathematische Theorie der Diffraction / A. Sommerfeld // Mathematische Annalen. — 1896. — Vol. 47. — Pp. 317–374.

References

1. Born M. Osnovy optiki / M. Born, E. Vol'f. — M.: Nauka, 1973. — 720 s.
2. Borovskii A.V. Difraktsionnyi integral Franka-Zommerfel'da / A.V. Borovskii, A.N. Borodin. — Irkutsk: Izd-vo BGUEP, 2012. — 64 s.

3. Borovskii A.V. Matematicheskaya teoriya difraktsii ploskoi volny na ideal'no-provodyashchem kline / A.V. Borovskii, A.N. Borodin, A.L. Galkin. — Irkutsk: Izd-vo BGUEP, 2013. — 104 s.

4. Borovskii A.V. Chislennoe modelirovanie difraktsii TH volny na ideal'no-provodyashchei poluploskosti / A.V. Borovskii, A.N. Borodin, A.L. Galkin // Izvestiya Irkutskoi gosudarstvennoi ekonomicheskoi akademii. — 2012. — № 5. — S. 124–129.

5. Borovskii A.V. Chislennoe modelirovanie effektivov difraktsii / A.V. Borovskii, A.N. Borodin, A.L. Galkin // Izvestiya Irkutskoi gosudarstvennoi ekonomicheskoi akademii (elektronnyi zhurnal). — 2012. — № 4. — URL: <http://eizvestia.isea.ru/reader/article.aspx?id=13859>.

6. Borodin A.N. Izmerenie svetorasseyaniya v zavisimosti ot radiusa krivizny kraia aperturnoi diafragmy / A.N. Borodin, A.N. Malov, S.A. Chuprakov // Komp'yuternaya optika. — 2005. — Vyp. 28. — S. 87–88.

7. Vladimirov V.S. Uravneniya matematicheskoi fiziki / V.S. Vladimirov. — M.: Nauka, 1982. — 512 s.

8. Grinberg G. Izbrannye voprosy matematicheskoi teorii elektricheskikh i magnitnykh yavlenii / G. Grinberg. — M.; L.: Izd-vo AN SSSR, 1948. — 727 s.

9. Zommerfel'd A. Optika / A. Zommerfel'd. — M.: Inostr. lit-ra, 1953. — 486 s.

10. Landau L.D. Teoreticheskaya fizika: v 10 t. / L.D. Landau, E.M. Lifshits. — T. 8: Elektrodinamika sploshnykh sred. — M.: Nauka, 1982. — 621 s.

11. Tikhonov A.N. Uravneniya matematicheskoi fiziki / A.N. Tikhonov, A.A. Samarskii. — M.: Nauka, 1972. — 735 s.

12. Frank F. Differentsial'nye i integral'nye uravneniya matematicheskoi fiziki / F. Frank, R. Mizes. — M.; L.: ONTI, 1937. — 998 s.

13. Kirchhoff G. // Ann.d.physik. — 1883. — № 18. — P. 663.

14. Sommerfeld A. Mathematische Theorie der Diffraction / A. Sommerfeld // Mathematische Annalen. — 1896. — Vol. 47. — Pp. 317–374.

Информация об авторах

Боровский Андрей Викторович — доктор физико-математических наук, профессор, кафедра информатики и кибернетики, Байкальский государственный университет экономики и права, г. Иркутск, e-mail: andrei-borovskii@mail.ru.

Галкин Андрей Леонидович — доктор физико-математических наук, заведующий сектором, Институт общей физики РАН им. А.М. Прохорова, г. Москва, e-mail: galkin@kapella.gpi.ru.

Authors

Borovsky Andrey Victorovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Chair of Computer Science and Cybernetics, Baikal State University of Economics and Law, Irkutsk, e-mail: andrei-borovskii@mail.ru.

Galkin Andrey Leonidovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of Sector, General Physics Institute of RAS named after A.M. Prokhorov, Moscow, e-mail: galkin@kapella.gpi.ru.