

К ВОПРОСУ О РАСЧЕТЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СТЕНОК СО ВСТРОЕННЫМИ НАГРЕВАТЕЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ В АВТОКЛАВАХ ВЫСОКОГО ДАВЛЕНИЯ

Описан метод учета упругих свойств не сплошного цилиндрического слоя с нагревательными элементами в сборной конструкции стенки автоклава. Доказана возможность эффективного определения условного модуля упругости этого слоя по приведенной номограмме.

Ключевые слова: несущая стенка, нагревательные элементы, дистанционные планки, автоклав, контактное давление.

D.A. Elovenko
O.V. Repetskiy

ON ISSUE OF CALCULATION OF CYLINDRICAL WALLS WITH INBUILT HEATING ELEMENTS IN HIGH-PRESSURE AUTOCLAVES

This paper describes the method of calculating elastic properties of discontinuous cylindrical layer with heating elements in integrated structure of autoclave's wall. The authors prove it possible to efficiently define the layer's conventional elasticity modulus on the basis of the given nomographic chart.

Keywords: load-bearing wall, heating elements, distance plates, autoclave, contact pressure.

В автоклавах высокого давления со встроенными в цилиндрическую стенку нагревательными элементами [1] расчет напряженного состояния стенки корпуса на стадии проектирования может быть сделан с использованием программы [2]. Однако в этой программе не учитываются геометрические особенности слоя, который образован дистанционными планками и нагревательными элементами. Этот слой не может воспринимать кольцевые силы. Также не представляется возможным описать аналитически характер периодического контактного взаимодействия находящихся в его составе дистанционных планок с соседними цилиндрическими слоями. Учитывая эти факты, предлагаем рассматривать слой с нагревательными элементами как цилиндр, имеющий особый модуль упругости. Величина этого модуля может быть подобрана аналитически. Для решения этой задачи необходимо рассмотреть условия совместности деформаций контактных поверхностей составного трехслойного цилиндра с разными модулями упругости слоев и аналогичной конструкции, средний слой которой образует дистанционные планки и нагревательные элементы.

1. Рассмотрим составной цилиндр рис. 1, с модулями упругости слоев E_1 , E_2 , E_3 , находящийся под действием постоянного внутреннего давления P_0 .

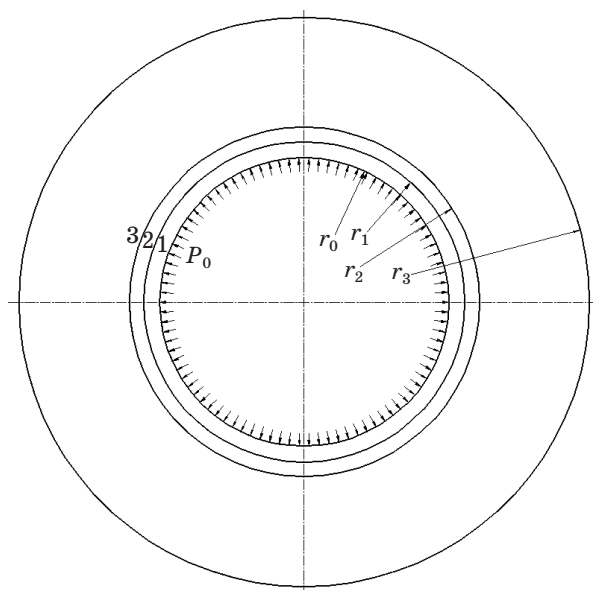


Рис. 1. Схема трехслойного цилиндра, нагруженного внутренним давлением

Перемещения на текущем радиусе толстостенного цилиндра определяются по формуле [3; 4]:

$$u = \varepsilon_t r = \frac{r}{E} (\sigma_t - \mu(\sigma_r + \sigma_z)).$$

Предполагаем, что цилиндр с днищами и осевые напряжения в нем равны:

$$\sigma_z = \frac{P_0}{\beta^2 - 1},$$

где $\beta = \frac{r_3}{r_0}$.

Тогда на радиусе r_1 первого слоя перемещения равны:

$$u_1(r_1) = \varepsilon_t r_1 = \frac{r_1}{E_1} \left(\sigma_t(P_0, P_1) - \mu \left(\frac{P_0}{\beta^2 - 1} \right) - \mu(-P_1) \right),$$

или с учетом выражений для кольцевых напряжений по формулам Ламе [3; 4]:

$$u_1(r_1) = \frac{r_1}{E_1} \left(\frac{P_0}{\beta_1^2 - 1} \left(1 + \frac{r_1^2}{r_1^2} \right) + \left(-\frac{P_1 \beta_1^2}{\beta_1^2 - 1} \left(1 + \frac{r_0^2}{r_1^2} \right) \right) - \mu \left(\frac{P_0}{\beta^2 - 1} \right) - \mu(-P_1) \right). \quad (1)$$

Аналогично определяем перемещения на внутреннем радиусе второго слоя (рис. 1):

$$u_2(r_1) = \frac{r_1}{E_2} \left(\frac{P_1}{\beta_2^2 - 1} \left(1 + \frac{r_2^2}{r_1^2} \right) + \left(-\frac{P_2 \beta_2^2}{\beta_2^2 - 1} \left(1 + \frac{r_1^2}{r_1^2} \right) \right) - \mu \left(\frac{P_0}{\beta^2 - 1} \right) - \mu(-P_1) \right), \quad (2)$$

и на наружном радиусе второго цилиндра:

$$u_2(r_2) = \frac{r_2}{E_2} \left(\frac{P_1}{\beta_2^2 - 1} \left(1 + \frac{r_2^2}{r_2^2} \right) + \left(-\frac{P_2 \beta_2^2}{\beta_2^2 - 1} \left(1 + \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) \right) - \mu \left(\frac{P_0}{\beta^2 - 1} \right) - \mu(-P_2) \right). \quad (3)$$

На внутреннем радиусе третьего цилиндра перемещения равны:

$$u_3(r_2) = \frac{r_2}{E_3} \left(\frac{P_2}{\beta_3^2 - 1} \left(1 + \frac{r_3^2}{r_2^2} \right) - \mu \left(\frac{P_0}{\beta^2 - 1} \right) - \mu(-P_2) \right). \quad (4)$$

Условия совместности деформаций для составного цилиндра (рис. 1) имеют вид:

$$\begin{cases} u_1(r_1) = u_2(r_1); \\ u_2(r_2) = u_3(r_2). \end{cases} \quad (5)$$

Полагая, что наружный и внутренний цилиндры выполнены из одного материала, $E_1 = E_3$, запишем систему уравнений (5) с учетом выражений (1), (2), (3) и (4):

$$\begin{cases} \frac{r_1}{E_1} \left(\frac{P_0}{\beta_1^2 - 1} \left(1 + \frac{r_1^2}{r_1^2} \right) + \left(-\frac{P_1 \beta_1^2}{\beta_1^2 - 1} \left(1 + \frac{r_0^2}{r_1^2} \right) \right) - \mu \left(\frac{P_0}{\beta^2 - 1} \right) - \mu(-P_1) \right) = \\ = \frac{r_1}{E_2} \left(\frac{P_1}{\beta_2^2 - 1} \left(1 + \frac{r_2^2}{r_1^2} \right) + \left(-\frac{P_2 \beta_2^2}{\beta_2^2 - 1} \left(1 + \frac{r_1^2}{r_1^2} \right) \right) - \mu \left(\frac{P_0}{\beta^2 - 1} \right) - \mu(-P_1) \right); \\ \frac{r_2}{E_2} \left(\frac{P_1}{\beta_2^2 - 1} \left(1 + \frac{r_2^2}{r_2^2} \right) + \left(-\frac{P_2 \beta_2^2}{\beta_2^2 - 1} \left(1 + \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) \right) - \mu \left(\frac{P_0}{\beta^2 - 1} \right) - \mu(-P_2) \right) = \\ = \frac{r_2}{E_1} \left(\frac{P_2}{\beta_3^2 - 1} \left(1 + \frac{r_3^2}{r_2^2} \right) - \mu \left(\frac{P_0}{\beta^2 - 1} \right) - \mu(-P_2) \right). \end{cases} \quad (6)$$

Разрешая систему (6) относительно неизвестных контактных давлений P_1 и P_2 , получим:

$$\begin{aligned} P_1 &= (r_3^2 - r_1^2) \left(\frac{P_2}{2r_1^2} \left(\frac{(\beta_3^2 + 1)}{E_1(\beta_3^2 - 1)} + \mu \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right) + \frac{(\beta_2^2 + 1)}{E_2(\beta_2^2 - 1)} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mu P_0}{2r_1^2(\beta^2 - 1)} \left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right) \right) E_2; \\ P_2 &= - \frac{P_0 E_2 \left(\frac{\mu}{(\beta^2 - 1)} \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right) + \left(\mu \left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right) + \frac{(\beta_1^2 + 1)}{E_1(\beta_1^2 - 1)} + \frac{(\beta_2^2 + 1)}{E_2(\beta_2^2 - 1)} \right) \left(\frac{\mu(r_3^2 - r_1^2)}{2r_1^2(\beta^2 - 1)} \left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right) E_2 \right) - \frac{2}{E_1(\beta_1^2 - 1)} \right)}{\frac{2\beta_2^2}{(\beta_2^2 - 1)} - \frac{E_2(r_3^2 - r_1^2)}{2r_1^2} \left(\mu \left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right) + \frac{(\beta_1^2 + 1)}{E_1(\beta_1^2 - 1)} + \frac{(\beta_2^2 + 1)}{E_2(\beta_2^2 - 1)} \right) \left(\frac{E_2(\beta_3^2 + 1)}{E_1(\beta_3^2 - 1)} + \mu \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right) E_2 + \frac{(\beta_2^2 + 1)}{(\beta_2^2 - 1)} \right)}. \end{aligned} \quad (7)$$

2. Рассмотрим теперь составной цилиндр, средний слой которого образован дистанционными планками и нагревательными элементами (рис. 2), находящийся под действием внутреннего давления P_0 .

Для конструкции (рис. 2), интегральное условие равновесия имеет вид:

$$\int_{r_0}^{r_1} \sigma_t + \int_{r_1}^{r_2} \sigma_t + \int_{r_2}^{r_3} \sigma_t = P_0 r_0. \quad (8)$$

В формуле (8) кольцевые напряжения во внутреннем цилиндре на текущем радиусе по формулам Ламе равны:

$$\sigma_t = \sigma_t(P_0, P_1) = \frac{P_0}{\beta_1^2 - 1} \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2} \right) + \left(-\frac{P_1 \beta_1^2}{\beta_1^2 - 1} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \right), \quad (9)$$

где $\beta_1 = \frac{r_1}{r_0}$.

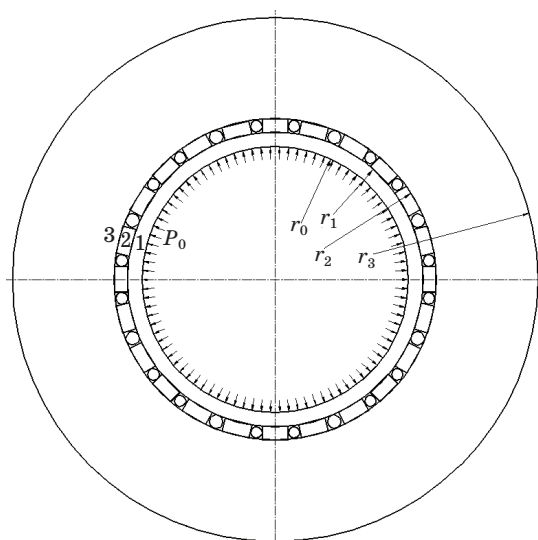


Рис. 2. Схема трехслойного цилиндра, средний слой которого образован дистанционными планками и нагревательными элементами

Средний слой представляет собой разрезанное кольцо, следовательно, кольцевые напряжения в нем равны нулю:

$$\sigma_t = \sigma_t(P_1, P_2) = 0.$$

Кольцевые напряжения в наружном цилиндре на текущем радиусе r имеют вид:

$$\sigma_t = \frac{P_2}{\beta_3^2 - 1} \left(1 + \frac{r_3^2}{r^2} \right), \quad (10)$$

где $\beta_3 = \frac{r_3}{r_2}$.

Тогда условие равновесия (8) с учетом выражений (9) и (10) можно записать:

$$\int_{r_0}^{r_1} \left(\frac{P_0}{\beta_1^2 - 1} \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2} \right) + \left(-\frac{P_1 \beta_1^2}{\beta_1^2 - 1} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \right) \right) dr + \int_{r_2}^{r_3} \left(\frac{P_2}{\beta_3^2 - 1} \left(1 + \frac{r_3^2}{r^2} \right) \right) dr = P_0 r_0. \quad (11)$$

Интегрируя выражение (11) получим:

$$P_1 r_1 = P_2 r_2. \quad (12)$$

Для этой конструкции условие совместности деформаций может быть записано в виде:

$$u_1(r_1) = u_3(r_2) + \left(\frac{P_1 + P_2}{2} + \mu \frac{P_0}{\beta^2 - 1} \right) \frac{(r_2 - r_1)}{E}$$

положим в этом выражении $E_1 = E_3$ (модули упругости первого и третьего цилиндра равны) и получим:

$$\begin{aligned} r_1 (\sigma_t(r_1) - \mu \sigma_z - \mu \sigma_r(r_1)) = \\ = r_2 (\sigma_t(r_2) - \mu \sigma_z - \mu \sigma_r(r_2)) + \left(\frac{P_1 + P_2}{2} + \mu \frac{P_0}{\beta^2 - 1} \right) (r_2 - r_1). \end{aligned} \quad (13)$$

Запишем систему уравнений (12) и (13) для определения контактных давлений:

$$\begin{cases} r_1 \left(\frac{P_0}{\beta_1^2 - 1} \left(1 + \frac{r_1^2}{r_1^2} \right) + \left(-\frac{P_1 \beta_1^2}{\beta_1^2 - 1} \left(1 + \frac{r_0^2}{r_1^2} \right) \right) - \mu \left(\frac{P_0}{\beta^2 - 1} \right) - \mu(-P_1) \right) = \\ = r_2 \left(\frac{P_2}{\beta_3^2 - 1} \left(1 + \frac{r_3^2}{r_2^2} \right) - \mu \left(\frac{P_0}{\beta^2 - 1} \right) - \mu(-P_2) \right) + \left(\frac{P_1 + P_2}{2} + \mu \frac{P_0}{\beta^2 - 1} \right) (r_2 - r_1); \\ P_1 r_1 = P_2 r_2. \end{cases} \quad (14)$$

Преобразуя систему (14) относительно контактного давления P_1 получим:

$$P_1 = \frac{2r_1 P_0}{\left(r_1 (\beta_1^2 + 1) + \frac{r_1 (\beta_3^2 + 1)(\beta_1^2 - 1)}{(\beta_3^2 - 1)} + \frac{(\beta_2^2 - 1)(\beta_1^2 - 1)r_2}{2} \right)}. \quad (15)$$

Выражение для контактного давления P_2 соответственно примет вид:

$$P_2 = \frac{2r_1^2 P_0}{\left(r_1 (\beta_1^2 + 1) + \frac{r_1 (\beta_3^2 + 1)(\beta_1^2 - 1)}{(\beta_3^2 - 1)} + \frac{(\beta_2^2 - 1)(\beta_1^2 - 1)r_2}{2} \right) r_2}.$$

Таким образом, появляется возможность подобрать значения общего модуля упругости E_2 для цилиндра, моделирующего средний слой в составном цилиндре (рис. 2). Результаты расчетов при заданных β_1 и β_2 для разных β реализованы в номограмме (рис. 3). Кривые, построенные по формуле (7) необходимо использовать для определения E_2 путем выбора нужной толстостенности цилиндрической части корпуса автоклава и определения расчетного значения P_1 по формуле (15). Из точки пересечения этого значения на вертикальной оси, с выбранной по значению толстостенности кривой, восстанавливается перпендикуляр к горизонтальной оси. Эта точка будет являться соответствующим искомым модулем упругости E_2 . На рис. 3 показан пример кривой для определенных β_1 и β_2 .

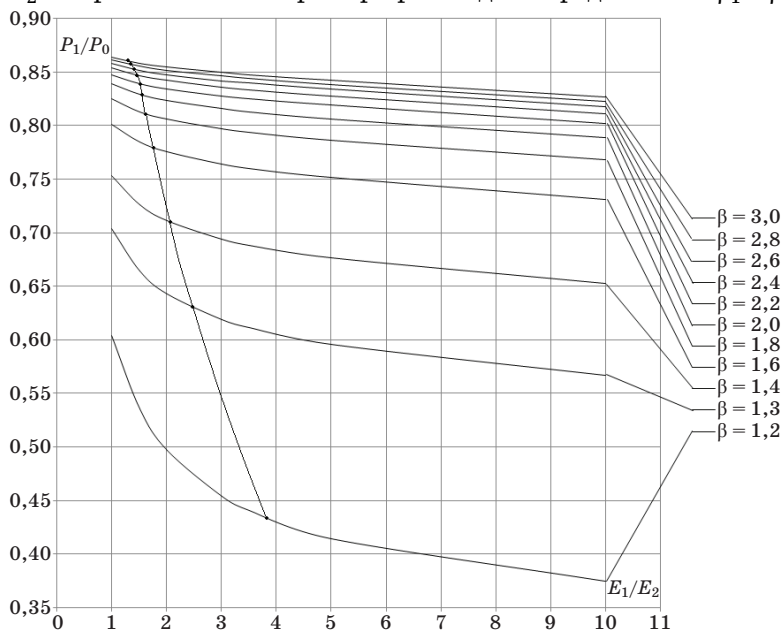


Рис. 3. Номограмма для выбора условного модуля упругости E_2 для слоя с нагревателями

В работе получены аналитические решения для определения контактных давлений в составной трехслойной цилиндрической стенке и аналогичной конструкции, средний слой которой образован дистанционными планками и нагревательными элементами. Приведена номограмма для выбора условного модуля упругости E_2 для слоя с нагревателями. Это позволяет определять модуль упругости слоя с дистанционными планками и нагревательными элементами при расчете напряженного состояния цилиндрических стенок конструкций, подобных описанной в статье [1], принимая многослойную стенку за нагревателями как один сплошной монолитный цилиндр. Также на основе полученных результатов можно уточнить программу [2].

Список использованной литературы

1. Еловенко Д.А. Экспериментальное исследование модели автоклава для гидротермального синтеза минералов / Д.А. Еловенко, П.Г. Пимштейн, О.В. Репецкий, Д.В. Татаринов. // Вестник Байкальского Союза Стипендиатов DAAD. — 2010. Вып. № 1(7). — С. 11–19.
2. Еловенко Д.А. Разработка программы для расчета температурных полей и напряжений в многослойной стенке сосуда высокого давления / Д.А. Еловенко // Применение математических методов и информационных технологий в экономике: сб. науч. тр. — Иркутск: Изд-во БГУЭП, 2011. Вып. 10. — 273 с.
3. Тимошенко С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. М.: Наука, 1979. — 560 с.
4. Филоненко-Бородич М.М. Теория упругости / М.М. Филоненко-Бородич. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1959. — 364 с.

References

1. Elovenko D.A. Eksperimental'noe issledovanie modeli avtoklava dlya gidrotermal'nogo sinteza mineralov / D.A. Elovenko, P.G. Pimshtein, O.V. Repetskii, D.V. Tatarinov. // Vestnik Baikal'skogo Soyuz Stipendiatov DAAD. — 2010. Vyp. № 1(7). — S. 11–19.
2. Elovenko D.A. Razrabotka programmy dlya rascheta temperaturnykh poлей i napryazhenii v mnogosloinoi stenke sosuda vysokogo davleniya / D.A. Elovenko // Primenenie matematicheskikh metodov i informatsionnykh tekhnologii v ekonomike: sb. nauch. tr. — Irkutsk: Izd-vo BGUEP, 2011. Vyp. 10. — 273 s.
3. Timoshenko S.P. Teoriya uprugosti / S.P. Timoshenko, Dzh. Gud'er. M.: Nauka, 1979. — 560 s.
4. Filonenko-Borodich M.M. Teoriya uprugosti / M.M. Filonenko-Borodich. — M.: Gos. izd-vo fiz.-mat. lit-ry, 1959. — 364 s.

Информация об авторах

Еловенко Денис Александрович — аспирант, кафедры информатики и кибернетики, Байкальский государственный университет экономики и права, г. Иркутск, e-mail: bear-paw3@yandex.ru.

Репецкий Олег Владимирович — доктор технических наук, профессор, проректор по международной деятельности, Байкальский государственный университет экономики и права, г. Иркутск, e-mail: repetskiy@isea.ru.

Authors

Elovenko Denis Alexandrovich — post-graduate student, Chair of Computer Science and Cybernetics, Baikal State University of Economics and Law, Irkutsk, e-mail: bear-paw3@yandex.ru.

Repetskiy Oleg Vladimirovich — Doctor of Science in Engineering, Professor, Vice Rector for International Relations, Baikal State University of Economics and Law, Irkutsk, e-mail: repetskiy@isea.ru.