

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ
ОПЕРАЦИОННОЙ ЭФФЕКТИВНОСТЬЮ
ВНУТРЕННЕГО КОНТРОЛЯ**

Показана возможность использования математической модели Вольтерра — Лотки, которая применительно к операционному аудиту может быть охарактеризована как модель, описывающая взаимодействие возможного количества ошибок и принятого количества контрольных процедур. Авторами введены в данную модель дополнительные параметры в целях управления операционной эффективностью внутреннего контроля. Для иллюстрации возможностей предлагаемого подхода рассмотрены численные примеры в среде Any Logic.

Ключевые слова: операционный аудит, оценка, эффективность, контрольные процедуры, уравнение Вольтерра — Лотки.

**S.S. Ovanesyan
A.A. Faleychik
E.E. Balyberdina**

**MATHEMATICAL MODEL OF MANAGING OPERATIONAL
EFFICIENCY OF INTERNAL CONTROL**

The article demonstrates a possibility of using the mathematical model of Volterr-Lotka, which, in the context of operational audit, can be characterized as a model that describes interaction between a probable number of errors and the actual number of control procedures. The authors introduce some additional parameters into the given model in order to manage operational efficiency of internal control, and illustrate the potential of the suggested approach by numerical examples in Any Logic environment.

Keywords: operation audit, estimation, efficiency, control procedures, the equation of Volterr-Lotka.

Одним из важнейших этапов развития системы внутреннего контроля (СВК) является оценка ее эффективности. До настоящего времени не существует регламентированного руководства, своего рода универсального стандарта, который бы содержал конкретную методику, позволяющую оценить как отдельные аспекты СВК, так и систему в целом. В связи с этим каждая новая методика оценки контроля перед ее внедрением должна быть тщательно протестирована. Одним из результативных инструментов оценки операционной эффективности внутреннего контроля компании является внутренний операционный аудит.

Операционный аудит в Российской Федерации в настоящее время только начинает развиваться. В этой связи, к сожалению, на современном этапе развития экономики в реальной практике российских компаний практически не используются научные подходы к оценке эффективности контрольных процедур.

Мы считаем, что на начальных этапах возможно оценивать операционную эффективность внутреннего контроля, сопоставляя количество ошибок и контрольных процедур.

В работе [2] была представлена математическая модель количественной динамики ошибок, обнаруживаемых при осуществлении непрерывных контрольных процедур. Модель представляет собой систему дифференциальных уравнений, связывающих две функции $N(t)$ и $V(t)$, где $N(t)$ — количество ошибок, обнаруженных к моменту времени t ; $V(t)$ — количество неких «элементарных» контрольных процедур, действующих к настоящему времени:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = N(a_1 - b_1V) \\ \frac{dV}{dt} = V(-a_2 + b_2N) \end{cases} \quad (1)$$

В данной модели $(a_1 - b_1V)$ — это коэффициент прироста ошибок, на который существенным образом влияет количество контрольных процедур $V(t)$. Аналогично $(-a_2 + b_2N)$ — это коэффициент прироста количества контрольных процедур, и он связан с количеством обнаруженных ошибок; a — коэффициент «естественного» прироста ошибок; b_1 — скорость устранения ошибок в пересчете на одну контрольную процедуру (по сути этот параметр наиболее ярко характеризует эффективность контроля); a_2 — коэффициент, характеризующий уменьшение количества процедур в отсутствие ошибок; b_2 — коэффициент, определяющий, на сколько потребуется увеличить количество контрольных процедур в пересчете на одну обнаруженную ошибку. Как было отмечено ранее в [2], данная модель по форме совпадает с моделью трофического взаимодействия по типу «хищник — жертва», предложенной В. Вольтерром [1].

Применительно к операционному аудиту данная модель может быть охарактеризована как модель, описывающая взаимодействие возможного количества ошибок и принятого количества контрольных процедур. Процесс взаимодействия ошибок и контрольных процедур выглядит, на наш взгляд, следующим образом: в процессе проведения контрольных процедур обнаруживаются и исправляются ошибки, в результате количество ошибок уменьшается, что, в свою очередь, приводит к тому, что количество контрольных мероприятий также уменьшается. Уменьшение количества контрольных процедур приводит к тому, что количество необнаруженных ошибок начинает расти. И цикл повторяется. В таком случае предложенная модель может позволить адаптировать СВК к фактически появляющемуся количеству обнаруженных ошибок в процессе операционного аудита.

Обзор отечественной и зарубежной экономической литературы свидетельствует об отсутствии данных, которые могли бы однозначно подтвердить справедливость использования модели Вольтера — Лотки [1] для описания механизмов организации и функционирования операционного аудита. Однако качественный анализ характерных решений для различных наборов входных параметров позволил бы в некоторой степени наметить перспективные пути поиска эффективных решений в организации процедур операционного аудита.

Предложенная выше модель имеет очевидное равновесное решение:

$$\begin{cases} N = \frac{a_2}{b_2} \\ V = \frac{a_1}{b_1} \end{cases} \quad (2)$$

Мы можем трактовать его как некую идеализированную ситуацию, когда соотношение между количеством обнаруженных ошибок и количеством контрольных процедур для их обнаружения является допустимым и не зависит от времени. Анализ устойчивости состояния равновесия по отношению к малым возмущениям показывает, что любые отклонения от равновесия не затухают, но переводят систему в колебательный режим с амплитудой, зависящей от величины возмущения. Траектории системы в координатной плоскости (N, V) будут иметь вид замкнутых кривых, окружающих точку равновесия. Используя терминологический аппарат операционного аудита, это означает, что если по каким-то обстоятельствам количество контрольных процедур было изменено и это повлекло рост числа необнаруженных ошибок, то такая ситуация может привести к тому, что количество ошибок может нарастать.

Действительно, разделив левую и правую части первого уравнения системы (1) на соответствующие части второго уравнения (2), получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dN}{dV} = \frac{N}{-a_2 + b_2 N_1} \frac{a_1 - b_1 N}{V}. \quad (3)$$

Общее решение уравнения (3) имеет вид

$$N^{-a_2} V^{-a_1} e^{b_2 N} e^{b_1 V} = C,$$

где C — некоторая постоянная.

Если мы введем полярные координаты с центром в точке равновесия (2):

$$\begin{cases} N = \frac{a_2}{b_2}(1 + \rho \cos \phi) > 0 \\ V = \frac{a_1}{b_1}(1 + \rho \sin \phi) > 0 \end{cases},$$

то, подставив эти выражения для N и V в исходную систему уравнений, после несложных преобразований получим

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = a_2 \cos^2 \phi (1 + \rho \sin \phi) + a_1 \sin^2 \phi (1 + \rho \cos \phi) \\ \frac{d\rho}{dt} = \sin \phi (\cos \phi) \rho (a_2 - a_1) - \rho^2 \sin^2 \phi (a_1 \cos \phi - a_2 \sin \phi) \end{cases}. \quad (4)$$

Производная $\frac{d\phi}{dt}$, как видно из (4), всегда больше нуля, т.е. производная не меняет знака, и, значит, вращение в плоскости (N, V) всегда в одну сторону.

Разрешая первое уравнение системы (4) относительно времени t в зависимости от угла поворота ϕ , можно найти период:

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{a_2 \cos^2 \phi (1 + \rho \sin \phi) + a_1 \sin^2 \phi (1 + \rho \cos \phi)}. \quad (5)$$

Период T можно рассматривать как расчетное время между двумя соседними моментами принятия решения об изменении управляемых параметров.

В силу периодичности решений $N(t)$ и $V(t)$ несложно проверить, что средние за период значения функций $N(t)$ и $V(t)$ совпадают с равновесными стационарными состояниями:

$$\begin{cases} \frac{1}{T} \int_0^T V dt = \frac{a_1}{b_1} \\ \frac{1}{T} \int_0^T N dt = \frac{a_2}{b_2} \end{cases}.$$

Для организации плана численных экспериментов с моделью рассмотрим некоторые возможности, связанные с управлением параметрами данной модели. Допустим, что операционный аудитор признал внутренний контроль неэффективным, т.е. отношение ошибок к количеству процедур перестало быть допустимым. Тогда может потребоваться уменьшение количества контрольных процедур. Либо возможна обратная ситуация: количество обнаруженных ошибок было признано слишком большим, и для уменьшения их количества необходимо увеличить количество контрольных процедур. Для математической модели это означает, что во втором уравнении модели (1) появляется еще один параметр p , который может принимать как положительные, так и отрицательные значения:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = N(a_1 - b_1 V) \\ \frac{dV}{dt} = V(-a_2 + p + b_2 N) \end{cases}.$$

Итак, p — количество дополнительных или уменьшенных контрольных процедур для управления эффективностью внутреннего контроля. Среднее значение для функции N будет равно

$$\frac{1}{T} \int_0^T N dt = \frac{a_2 - p}{b_2}.$$

Среднее значение для функции V останется прежним:

$$\frac{1}{T} \int_0^T V dt = \frac{a_1}{b_1}.$$

Изложенная формальная теория позволяет графически представить состояние равновесия в данной модели и исследовать это состояние под воздействием возмущений. Для иллюстрации возможностей предлагаемого подхода рассмотрим численный пример в среде Any Logic (версия 6.5.1). Пусть точка равновесия модели будет (10, 10), т.е. в стационарном режиме при уровне в десять контрольных процедур число ошибок также сохраняется на уровне 10.

Далее, к примеру, увеличим параметр a_2 на 1, 2, 10%, т.е. $p = 0,01 \cdot a_2 = 0,005$; $p = 0,02 \cdot a_2 = 0,01$; $p = 0,1 \cdot a_2 = 0,05$ соответственно. Тогда при сохранении среднего количества контрольных процедур количество ошибок уменьшится (рис. 1).

На рис. 1, а и б представлена динамика количества ошибок $N(t)$ и контрольных процедур $V(t)$, на рис. 1, в можно проследить взаимосвязь между количеством контрольных процедур и количеством ошибок.

Рисунки 1, а и б дают возможность определить период T , который вычисляется по формуле (5). Кроме того, как видно из рис. 1, а и б, между двумя графиками имеется сдвиг по времени, который является естественным, поскольку решения об изменении количества контрольных процедур принимаются на основе анализа обнаруженных ошибок.

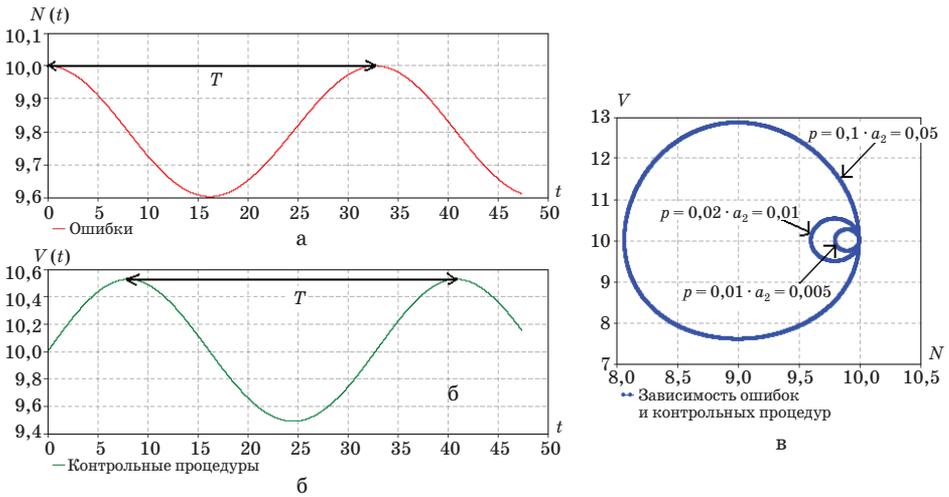


Рис. 1. Зависимость количества контрольных процедур и ошибок при заданных параметрах $p = 0,01 \cdot a_2$; $p = 0,02 \cdot a_2$; $p = 0,1 \cdot a_2$

На рис. 1, в представлена диаграмма, содержащая полезную информацию относительно влияния параметров дополнительных процедур p на изменение количества ошибок N . Так, при $p = 0,01 \cdot a_2 = 0,005$ изменения среднего количества ошибок достаточно малы (центр самой малой фигуры совсем незначительно сместился влево по оси N относительно первоначального значения $N = 10$). Если $p = 0,02 \cdot a_2 = 0,01$, происходит дальнейшее смещение центра фигуры влево, $N = 9,8$. При $p = 0,1 \cdot a_2 = 0,05$ наблюдается более существенное уменьшение среднего количества ошибок (среднее значение $N = 9$).

Для того чтобы изменить среднее значение количества контрольных процедур, необходимо манипулировать с интенсивностью этих процедур, т.е. с коэффициентом b_1 . Таким образом, в первое уравнение модели введем еще один параметр для управления q , показывающий изменение интенсивности каждой отдельной контрольной процедуры:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = N(a_1 - (b_1 + q)V) \\ \frac{dV}{dt} = V(-a_2 + p + b_2N) \end{cases}$$

Тогда средние значения можно найти по формулам:

$$\begin{cases} \frac{1}{T} \int_0^T N dt = \frac{a_2 - p}{b_2} \\ \frac{1}{T} \int_0^T V dt = \frac{a_1}{b_1 + q} \end{cases}$$

Увеличим q на 10%, чтобы, сохраняя уменьшенное количество ошибок (рис. 1), уменьшить среднее количество контрольных процедур (рис. 2).

Как видно из рис. 2, в, действительно происходит снижение среднего количества контрольных процедур, $V = 9,09$.

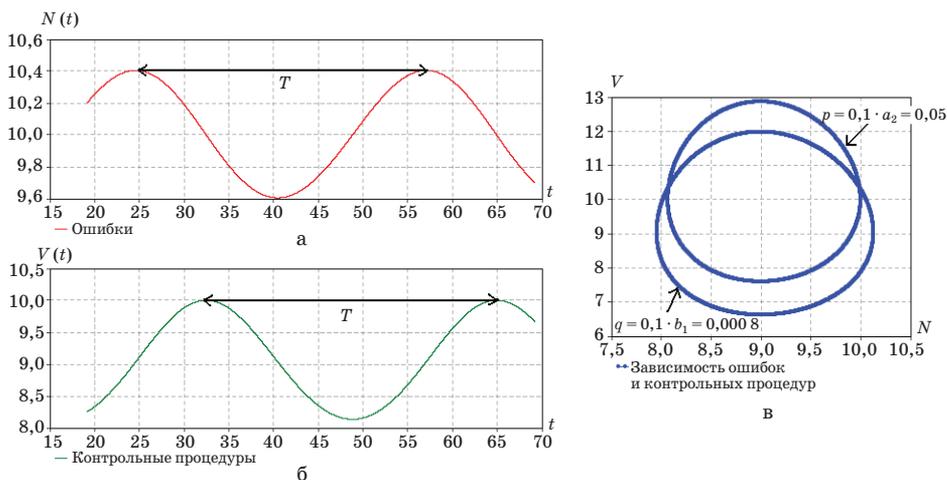


Рис. 2. Зависимость количества контрольных процедур и ошибок при заданных параметрах $p = 0,1 \cdot a_2$ и $q = 0,1 \cdot b_1$

Решение проблемы уменьшения среднего количества ошибок за счет увеличения контрольных процедур не всегда приемлемо. Тогда можно увеличить коэффициент b_2 , добавив еще один параметр r во второе уравнение:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = N(a_1 - (b_1 + q)V) \\ \frac{dV}{dt} = V(-a_2 + p + (b_2 + r)N) \end{cases}$$

Параметр r характеризует скорость усвоения информации об обнаруженных ошибках. Средние значения можно найти, используя выражения:

$$\begin{cases} \frac{1}{T} \int_0^T N dt = \frac{a_2 - p}{b_2 + r} \\ \frac{1}{T} \int_0^T V dt = \frac{a_1}{b_1 + q} \end{cases} \quad (6)$$

В этом случае даже если количество контрольных процедур уменьшить ($p < 0$), то для того чтобы сохранить среднее количество ошибок хотя бы на прежнем уровне, параметр r можно найти из очевидного неравенства:

$$\frac{a_2 - p}{b_2 + r} \leq \frac{a_2}{b_2}, \quad \text{т.е. } r \geq -p \frac{b_2}{a_2}.$$

При увеличении теперь и r на 10% уменьшается среднее количество ошибок (6) (рис. 3).

Рисунок 3, в показывает, что происходит уменьшение среднего количества ошибок до уровня $N = 8,18$ и одновременно снижение среднего количества контрольных процедур до уровня $V = 9,09$.

Мы полагаем, что введение дополнительных параметров (p , q и r) вполне достаточно для описания широкого спектра различных ситуаций. В целом несложно вычислить, какими следует выбрать параметры p , q и r , для

того чтобы средние значения функций N и V оказались приемлемыми и, следовательно, внутренний контроль считался бы эффективным.

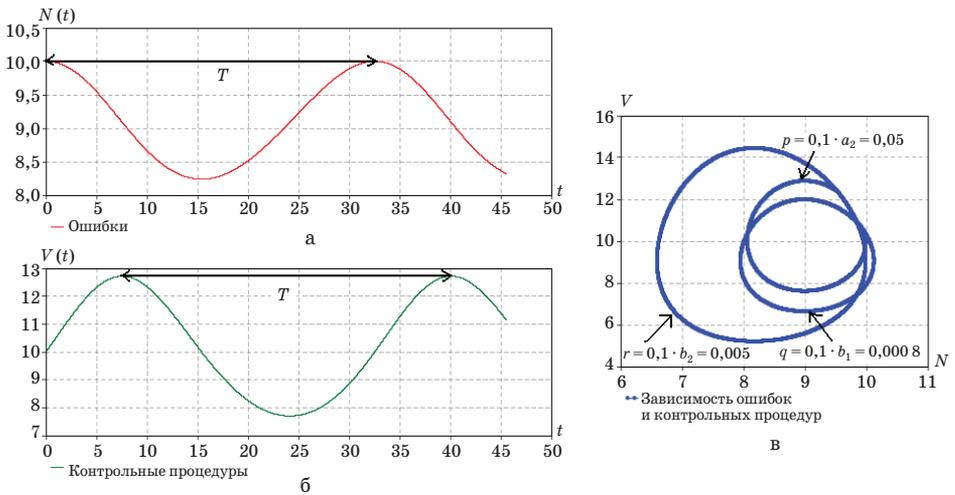


Рис. 3. Зависимость количества контрольных процедур и ошибок при заданных параметрах $p = 0,1 \cdot a_2$; $q = 0,1 \cdot b_1$ и $r = 0,1 \cdot b_2$

Однако существует еще одна важная проблема, связанная с нарушением равновесного состояния системы. Не стоит забывать, что амплитуда колебаний существенно зависит от величины возмущений. Поэтому, для того чтобы амплитуда колебаний не стала неприемлемо большой, переход из точки равновесия к нужным средним значениям N и V следует осуществлять небольшими вариациями параметров, контролируя их величину хотя бы визуально на мониторе компьютера во время проведения численных экспериментов.

Достоинством реализации данной модели в среде Any Logic является возможность непрерывного визуального мониторинга всех изменений при смене параметров.

В заключение отметим, что изложенная формальная теория и ее графическая интерпретация служат основанием для разработки инструментария адаптивного управления количеством контрольных процедур, направленных на повышение операционной эффективности внутреннего контроля, для применения в практической деятельности внутренних аудиторов, занимающихся операционным аудитом.

Список использованной литературы

1. Вольterra В. Математическая теория борьбы за существование / В. Вольterra; пер. с фр. О.Н. Бондаренко; под ред. и с послесл. Ю.М. Свирежева. — М.: Наука, 1976. — 287 с.
2. Ованесян С.С. Использование математических методов для оценки эффективности контрольных процедур в операционном аудите / С.С. Ованесян, А.А. Фалейчик, Е.Е. Балыбердина // Известия Иркутской государственной экономической академии. — 2011. — № 6. — С. 194–197.

Referenses

1. Vol'terra V. Matematicheskaya teoriya bor'by za sushchestvovanie / V. Vol'tera; per. s fr. O.N. Bondarenko; pod red. i s poslesl. Yu.M. Svirzheva. — M.: Nauka, 1976. — 287 с.

2. Ovanesyan S.S. Ispol'zovanie matematicheskikh metodov dlya otsenki effektivnosti kontrol'nykh protsedur v operatsionnom audite / S.S. Ovanesyan, A.A. Faleichik, E.E. Balyberdina // Izvestiya Irkutskoi gosudarstvennoi ekonomicheskoi akademii. — 2011. — № 6. — S. 194–197.

Информация об авторах

Ованесян Сергей Суменович — доктор экономических наук, профессор, заведующий кафедрой статистики и экономического анализа, Байкальский государственный университет экономики и права, г. Иркутск, e-mail: ovanesan@isea.ru.

Фалейчик Андрей Анатольевич — кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математики, Читинский институт (филиал) Байкальского государственного университета экономики и права, г. Чита, e-mail: LMF55@bk.ru.

Балыбердина Елена Евгеньевна — старший преподаватель, кафедра бухгалтерского учета и аудита, Читинский институт (филиал) Байкальского государственного университета экономики и права, г. Чита, e-mail: eebalyb@mail.ru.

Authors

Ovanesyan Sergey Surenovich — Doctor of Economics, Professor, Chairholder, Chair of Statistics and Economic Analysis, Baikal State University of Economics and Law, Irkutsk, e-mail: ovanesan@isea.ru.

Faleychik Andrey Anatolievich — PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Chair of Mathematics, Chita Institute of Baikal State University of Economics and Law, Chita, e-mail: LMF55@bk.ru.

Balyberdina Elena Evgenievna — Senior Instructor, Chair of Accounting and Audit, Chita Institute of Baikal State University of Economics and Law, Chita, e-mail: eebalyb@mail.ru.