ЭЛЕКТРОННЫЙ НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ ИЗВЕСТИЯ ИРКУТСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ АКАДЕМИИ (Байкальский государственный университет экономики и права) http://eizvestia.isea.ru 2012. № 3



УДК 336.71
ББК 65.262

**О.В. Репецкий**
**До Мань Тунг**

# АНАЛИЗ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОЛЬЦЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Рассматривается математическое моделирование и решение задачи свободных колебаний круглых пластин с использованием кольцевых элементов и метода конечных элементов. Дана полная информация о проблемах вибраций, которая служит входной характеристикой при проектировании, изготовлении и эксплуатации деталей.

*Ключевые слова*: круглая пластина, свободное колебание, кольцевой элемент, метод конечных элементов.

**O.V. Repetskiy**
**Do Manh Tung**

# ANALYSIS OF FREE VIBRATIONS OF CIRCULAR PLATES WITH ANNULAR ELEMENTS

This paper deals with mathematical modeling and solving the problem of free vibrations of circular plates with annular elements and using the method of finite elements. It also gives full information about the problems of vibrations, which is characteristic of the input in the design, manufacture and operation details.

*Keywords*: circular plate, free vibration, annular element, finite element method.

Круглые пластинки и оболочки вращения широко применяются в различных отраслях: машиностроение, в научных исследованиях, в приборостроении, в химическом машиностроении, в авиации и т.д. Практика эксплуатации машин показывает, что достаточный запас прочности деталей при статическом нагружении не дает полной гарантии надежной работы. Множество деталей разрушаются при работе от усталости. Это вызывает необходимость исследования как собственных частот, так и распределения динамических напряжений в деталях по положению и материалу деталей. В этой работе даны математическая модель, решение задачи о собственных колебаниях круглых пластин с использованием кольцевых элементов.

Дифференциальное уравнение изгиба круглой пластины постоянной толщины в полярных координатах имеет вид [1; 6]

$$\nabla\nabla w + \frac{\rho h}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

где $\nabla$ — оператор Лапласса в полярных координатах $r$ и $\theta$; $w$ — прогиб; $\rho$ — плотность; $D = (Eh^3)\ /\ 12(1-\mu^2)$ — цилиндрическая жесткость; $h$ — толщина пластины.

Решение дифференциального уравнения для собственных колебаний имеет вид

$$w(r,\ \theta,\ t) = \overline{w}(r,\ \theta)(A\cos pt + B\sin pt), \tag{2}$$

где $\overline{w}$ — функция формы только от полярных координат, без учета времени.

http://eizvestia.isea.ru 2012. № 3
ЭЛЕКТРОННЫЙ НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ ИЗВЕСТИЯ ИРКУТСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ АКАДЕМИИ (Байкальский государственный университет экономики и права)

Можно представлять эту функцию с $m$ узловых диаметров в виде [1; 6]

$$\bar{w}(r,\ \theta) = \bar{w}(r)\cos n\theta.$$

Подставив выражение (2) в (1) получим

$$\nabla\nabla\bar{w} - k^4\bar{w} = 0,$$

где $k$ — корень частотного уравнения, определяющий частоту колебаний и зависящий от граничных условий пластины (величина безразмерная)

$$k^4 = \frac{\rho h a^4 p^2}{D},$$

где $a$ — внешний радиус пластины.

Частота собственных колебаний круглых (сплошных) и кольцевых пластин имеет вид

$$p_1 = \frac{k^2}{2\pi b^2}\sqrt{\frac{D}{\rho h}}.$$

Граничные условия [1; 6] можно представить в виде:

1. Для жестко закрепленного внешнего контура при $r = a$; $w = 0$; $dw\ /\ dr = 0$.
2. Для шарнирно-опертого внешнего контура при $r = a$; $w = 0$; $M_r = 0$.
3. Для свободных колебаний $Q_r = 0$; $M_r = 0$.

При расчете изгибных колебаний круглых пластин переменной толщины в ряде случаев целесообразно применять кольцевые конечные элементы, которые строятся на следующих аппроксимирующих полиномах [2]

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 r^2 + \alpha_4 r^3, \tag{3}$$

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 r^2 + \alpha_4 r^3 + \alpha_5 r^4 + \alpha_6 r^5. \tag{4}$$

Узловыми перемещениями являются соответственно [2]

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} w \\ \dfrac{\partial w}{\partial r} \end{Bmatrix}, \qquad \{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} w \\ \dfrac{\partial w}{\partial r} \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} \end{Bmatrix}. \tag{5}$$

Краткие характеристики кольцевых конечных элементов приведены на рис. 1 и 2.

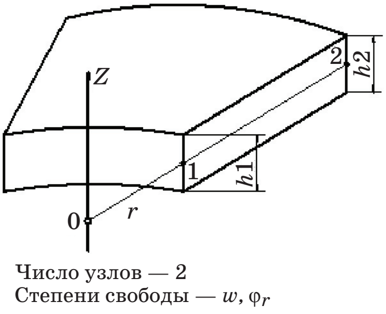



*Рис. 1. STI2R4 — кольцевой конечный элемент для расчета изгиба пластин*

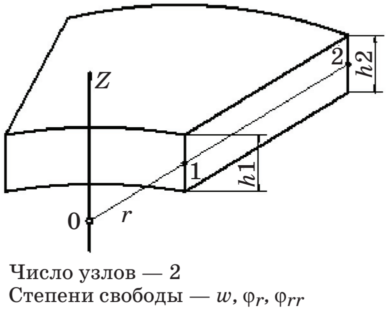



*Рис. 2. STI2R6 — кольцевой конечный элемент для расчета изгиба пластин*

http://eizvestia.isea.ru 2012. № 3
ИЗВЕСТИЯ ИРКУТСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ АКАДЕМИИ (Байкальский государственный университет экономики и права)
ЭЛЕКТРОННЫЙ НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Из выражений (3), (4), (5) удается выразить произвольные точки элемента через узловые перемещения и определить матрицу формы [2; 3]

$$\{\delta\} = [N]\{\delta_e\}.$$

Использование матрицы $[N]$ позволяет вычислить матрицу масс кольцевых конечных элементов. После интегрирования по угловой координате, можно получить выражение для матрицы масс в следующем виде [2; 5]

$$[M_e] = 2\pi\rho\int_{r_1}^{r_2}[N]^T[N]hrdr.$$

Для определения матрицы жесткости необходимо последовательно найти в произвольной точке деформации [2]

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{d^2w}{dr^2} \\ -\dfrac{1}{r}\dfrac{dw}{dr} + \dfrac{n^2}{r^2}w \\ -\dfrac{2n}{r}\dfrac{dw}{dr} + \dfrac{2n}{r^2}w \end{Bmatrix} = [B]\{\delta_e\},$$

и напряжения $[\sigma] = [D]\{\varepsilon\}$.

Выполняя интегрирование выражения для матриц жесткости кольцевых элементов получим [2; 3; 5]

$$[K_e] = 2\pi\int_{r_1}^{r_2}[B]^T[D][B]rdr.$$

Входящая в подинтегральное выражение толщина кольцевого элемента изменяется по линейному закону

$$h = h_1 + \frac{(h_2 - h_1)(r - r_1)}{r_2 - r_1}.$$

При интегрировании выражений для матриц масс и жесткости конечных элементов использовалась пятиточечная схема квадратур Гасс-Лежандра.

Рассмотрим колебания свободной сплошной круглой пластины с постоянной толщиной и жестко закрепленным внешним контуром. Конечноэлементная модель сектора диска на основе кольцевых конечных элементов STI2R6 с изгибной жесткостью и тремя степенями свободы в узле содержит 48 степеней свободы. Значения величины $k^2$ (частотный коэффициент) в зависимости от числа узловых окружностей $n$ и числа узловых диаметров $m$ приведены на рис. 4 в виде частотной диаграммы и в табл.1.

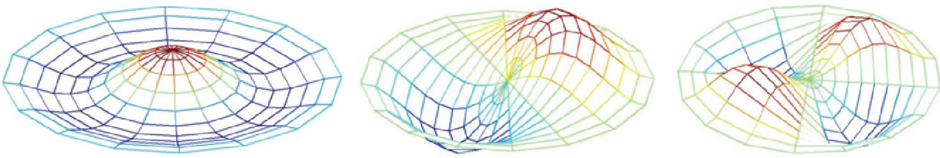
Таблица 1

***Сопоставление расчетных и теоретических значений частотных коэффициентов $k^2$ собственных колебаний диска***

| $m$ | $n = 0$ | | $n = 1$ | | $n = 2$ | | $n = 3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | МКЭ | [6] | МКЭ | [6] | МКЭ | [6] | МКЭ | [6] |
| 0 | 10,14 | 10,21 | 21,11 | 21,22 | 34,63 | 34,84 | 50,68 | 51,04 |
| 1 | 39,49 | 39,78 | 60,41 | 61,00 | 84,01 | 88,36 | 110,30 | 111,00 |
| 2 | 88,50 | 88,90 | 119,30 | 120,56 | 152,80 | 158,76 | 189,10 | 190,30 |
| 3 | 157,10 | 145,60 | 197,80 | 199,06 | 241,20 | 242,71 | 287,40 | 289,17 |

Источник: [1; 6].

ЭЛЕКТРОННЫЙ НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ ИЗВЕСТИЯ ИРКУТСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ АКАДЕМИИ (Байкальский государственный университет экономики и права) 2012. № 3 http://eizvestia.isea.ru



$n = 0; m = 1$ $n = 1; m = 0$ $n = 2; m = 0$

*Рис. 3. Формы колебаний*

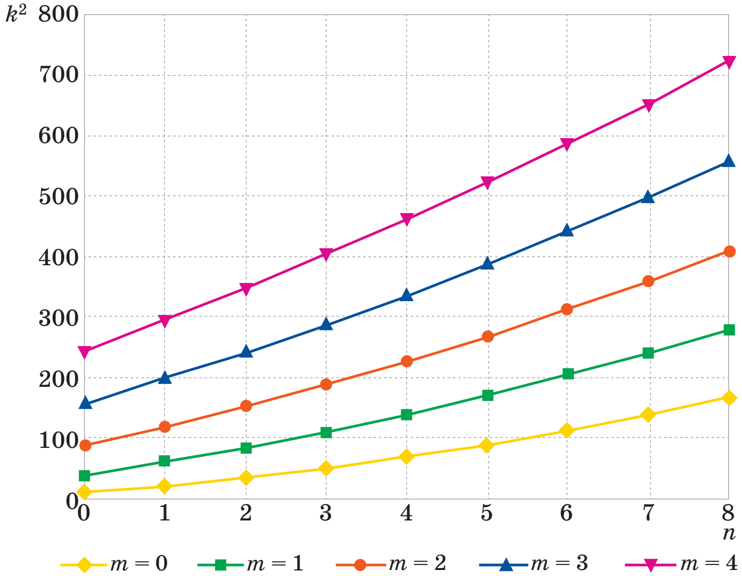



*Рис. 4. График зависимости частотного коэффициента колебаний диска от n и m*[1]

Рассмотрим собственные колебания кольцевых пластин, жестко закрепленных по внутреннему радиусу. Геометрические размеры и характеристики материала рассчитываемой конструкции: внутренний радиус 0,101 6 м, внешний радиус 0,203 2 м, толщина диска 0,001 016 м, модуль упругости 216 ГПа, плотность 8 230 кг/м$^3$, коэффициент Пуассона 0,28. Конечноэлементная модель диска на основе кольцевых конечных элементов с изгибной жесткостью и тремя степенями свободы в узле содержит 33 степени свободы. Результаты расчета частот собственных колебаний приведены на рис. 5 в виде частотной диаграммы и в табл. 2.

Таблица 2

***Сопоставление расчетных и экспериментальных значений частот собственных колебаний диска [4]***

| $m$ | $n = 0$ | | $n = 1$ | | $n = 2$ | | $n = 3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | МКЭ | [4] | МКЭ | [4] | МКЭ | [4] | МКЭ | [4] |
| 0 | 79,04 | 79,20 | 80,81 | 81,20 | 89,79 | 90,30 | 113,60 | – |
| 1 | 517,20 | 515,80 | 527,30 | 526,30 | 558,00 | 557,30 | 609,20 | – |
| 2 | 1 483,00 | – | 1 494,00 | – | 1 525,00 | – | 1 579,00 | – |

Источник: [4].

[1] Частоты колебаний круглых пластин зависят не только от граничных условий, но и от числа узловых окружностей $m$ и числа узловых диаметров $n$. Наличие узловой окружности при колебании пластины значительно увеличивает частоту колебаний.

http://eizvestia.isea.ru 2012. № 3
ЭЛЕКТРОННЫЙ НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ ИЗВЕСТИЯ ИРКУТСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ АКАДЕМИИ (Байкальский государственный университет экономики и права)

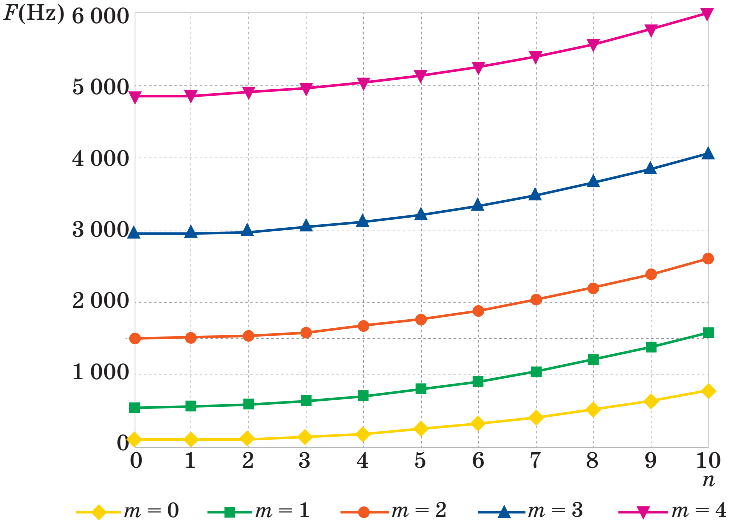



*Рис. 5. График зависимости частот колебаний кольцевых пластин от n и m*[1]

Анализ колебаний круглых пластин на основе кольцевых конечных элементов дает результаты с высокой точностью и снижением трудоемкости. Этот метод широко используется при анализе колебаний круглых пластин с переменной толщиной и сложными приложенными нагрузками.

В этой работе приведены формы колебаний круглых пластин, собственные частоты в зависимости от числа узловых диаметров и узловых окружностей. Колебания более высоких порядков связаны с образованием узловых окружностей и узловых диаметров, которые остаются неподвижными при колебании остальных точек. Это полная информация о проблемах вибраций, которая служит входной характеристикой при проектировании, изготовлении и эксплуатации деталей.

## Список использованной литературы

1. Бидерман В.Л. Теория механических колебания / В.Л. Бидерман. — М.: Высш. шк., 1980. — 408 с.

2. Борискин О.Ф. Автоматизированные системы расчета колебаний методом конечных элементов / О.Ф. Борискин. — Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1984. — 188 с.

3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. — М.: Мир, 1975. — 541с.

4. Репецкий О.В. Компьютерный анализ динамики и прочности турбомашин / О.В. Репецкий. — Иркутск: Изд-во ИрГТУ, 1999. — 301 с.

5. Рикардс Р.Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин / Р.Б. Рикардс. — Рига: Зинатне, 1988. — 284 с.

6. Чижевский К.Г. Расчет круглых и кольцевых пластин: справ. пособие / К.Г. Чижевский. — Л.: Машиностроение (Ленингр. отд-ние), 1977. — 184 с.

[1] Колебания кольцевых пластин обладают свойствами, как колебания круглых пластин. Кроме этого, собственные частоты колебаний кольцевых пластин зависят от отношения радиусов внутреннего и наружного контуров. В этом примере: $b / a = 0{,}5$ ($a$, $b$ — внешний и внутренний радиус диска) число узловых диаметров n мало сказывается на частоте колебаний.

http://eizvestia.isea.ru
2012. № 3
ЭЛЕКТРОННЫЙ НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
ИЗВЕСТИЯ ИРКУТСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ АКАДЕМИИ
(Байкальский государственный университет экономики и права)

## Referenses

1. Biderman V.L. Teoriya mekhanicheskikh kolebaniya / V.L. Biderman. — M.: Vyssh. shk., 1980. — 408 s.

2. Boriskin O.F. Avtomatizirovannye sistemy rascheta kolebanii metodom konechnykh elementov / O.F. Boriskin. — Irkutsk: Izd-vo Irkut. un-ta, 1984. — 188 s.

3. Zenkevich O. Metod konechnykh elementov v tekhnike / O. Zenkevich. — M.: Mir, 1975. — 541s.

4. Repetskii O.V. Komp'yuternyi analiz dinamiki i prochnosti turbomashin / O.V. Repetskii. — Irkutsk: Izd-vo IrGTU, 1999. — 301 s.

5. Rikards R.B. Metod konechnykh elementov v teorii obolochek i plastin / R.B. Rikards. — Riga: Zinatne, 1988. — 284 s.

6. Chizhevskii K.G. Raschet kruglykh i kol'tsevykh plastin: sprav. posobie / K.G. Chizhevskii. — L.: Mashinostroenie (Leningr. otd-nie), 1977. — 184 s.

## Информация об авторах

*Репецкий Олег Владимирович* — доктор технических наук, профессор, г. Иркутск, e-mail: repetskiy@isea.ru.

*До Мань Тунг* — аспирант, кафедра информатики и кибернетики, Байкальский государственный университет экономики и права, г. Иркутск, e-mail: manhtungcvp@yahoo.com.

## Authors

*Repetskiy Oleg Vladimirovich* — Doctor of Science in Engineering, Professor, Irkutsk, e-mail: repetskiy@isea.ru.

*Do Manh Tung* — post-graduate student, Chair of Computer Science and Cybernetics, Baikal State University of Economics and Law, Irkutsk, e-mail: manhtungcvp@yahoo.com.